৯ম - ১০ম শ্রেণি

উচ্চতর গণিত

আলোচ্য বিষয়

অধ্যায় ১ - সেট ও ফাংশন

ব্যবহারবিধি

দেখে নাও এই অধ্যায় থেকে কোথায় কোথায় প্রশ্ন এসেছে এবং সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনীর গুরুত্ব।

কুইক টিপস

সহজে মনে রাখার এবং দ্রুত ক্যালকুলেশন করতে সহায়ক হবে।

বহুনির্বাচনী (MCQ)

বিগত বছর গুলোতে বোর্ড, স্কুল, কলেজ এবং বিশ্ববিদ্যালয়ে আসা বহুনির্বাচনী দেখে নাও উত্তরসহ।

সৃজনশীল (CQ)

পরীক্ষায় আসার মতো গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল দেখে নাও উত্তরসহ।

প্র্যাকটিস

পরীক্ষায় আসার মতো গুরুত্বপূর্ণ সমস্যাগুলো প্র্যাকটিস করে নিজেকে যাচাই করে নাও।

উত্তরমালা

প্র্যাকটিস সমস্যাগুলোর উত্তরগুলো মিলিয়ে নাও।

উদাহরণ

টপিক সংক্রান্ত উদাহরণসমূহ।

সূত্রের আলোচনা

সূত্রের ব্যাপারে বিস্তারিত জেনে নাও।

টাইপ ভিত্তিক সমস্যাবলী

সম্পূর্ণ অধ্যায়ের সুসজ্জিত আলোচনা।

এক নজরে...

সেট: "বাস্তব জগত বা চিন্তা জগতের বস্তুর যেকোনো সুনির্ধারিত সংগ্রহ" কে সেট বলা হয়। সেটকে সাধারণত ইংরেজি বড় অক্ষর, যেমন: A,B,C,D,X,Y ইত্যাদি এবং সেটের সদস্যকে ইংরেজি ছোট অক্ষর a,b,c,d,x,y ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা যায়। সেটের সদস্যকে সেটের উপাদানও বলা হয়।

এক নজরে সেটে ব্যবহৃত চিহ্নসমুহ:

চিহ্ন	যা বোঝায়	যেভাবে পড়া হয় (ইংরেজীতে)	উদাহারণ
$\subseteq$	উপসেট	subset	$A \subseteq B$
$\nsubseteq$	উপসেট নয়	not subset	$A \nsubseteq B$
$\subset$	প্রকৃত উপসেট	proper subset	$A \subset B$
$\not\subset$	প্রকৃত উপসেট নয়	not proper subset	$A \not\subset B$
$\in$	উপাদান\ সদস্য	belongs to	$x \in A$
$\notin$	উপাদান নয়	not belongs to	$x \notin A$
$\cup$	সংযোগ সেট	Union	$A \cup B$
$\cap$	ছেদ সেট	Intersection	$A \cap B$
$\emptyset$	ফাকা সেট	null set	$\emptyset = \{\}$
:	যেন	such that	$A = \{x : x \in R\}$
$'$	পূরক সেট	prime	$A' = \{x \in U : x \notin A\}$

সেট প্রকাশের পদ্ধতি (মাধ্যমিক গণিত থেকে গৃহীত): সেট প্রকাশ করার দু'টি পদ্ধতি আছে। যথা

(১) তালিকা পদ্ধতি (Tabular Method বা Roster Method): এই পদ্ধতিতে সেটের উপাদানকে {} এর মধ্যে আবদ্ধ করা হয় এবং উপাদানগুলোকে আলাদা করার জন্য কমা (,) ব্যাবহার করা হয়।

যেমন: $A = \{2,3,5,7,11,13,17\},\ B = \{a,,b,c\}$

(২) সেট গঠন পদ্ধতি (Set Builder Method Rule Method): এই পদ্ধতিতে উপাদানের সাধারণ ধর্মের উল্লেখ করে সেট কে বর্ণনা করা হয়। যেমন, $A = \{x: x$ জোড় স্বাভাবিক সংখ্যা}

সার্বিক সেট (Universal set): যদি আলোচনাধীন সকল সেট একটি নির্দিষ্ট বড় সেটের উপসেট হয় তবে ঐ নির্দিষ্ট সেটকে সার্বিক সেট বলা হয়। সার্বিক সেটকে সাধারণত U প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন: $A = \{1,2,3,\}, B = \{2,3,4\}, C = \{7,8,9\},$ এবং $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ হলেই A, B ও C প্রত্যেকেই এর উপসেট। সুতরাং এখানে U হলো সার্বিক সেট।

উপসেট: যদি A সেটের প্রত্যেক উপাদান B এরও উপাদান হয় তবে A কে B এর উপসেট বলে। একে প্রতীকে লেখা হয়, $A \subseteq B$ এবং পড়া হয় A, B এর উপসেট।

উদাহরণ: $A = \{2,4,6,8\}$ এবং $B = \{2,4,6,8\}; A \subseteq B$

প্রকৃত উপসেট: A সেটের প্রত্যেক উপাদান যদি B সেটে বিদ্যমান থাকে এবং B সেটে অন্তত একটি উপাদান থাকে যা A সেটে নেই তবে A কে B এর প্রকৃত উপসেট বলে। একে $A \subset B$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ: $A = \{2,4,6,8,\}$ এবং $B = \{1,2,4,5,6,8\}; A \subset B$

পূরক সেট: U সার্বিক সেট এবং A সেটটি U এর উপসেট। A সেটের বহির্ভূত সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেট কে A সেটের পূরক বলে। A এর পূরক সেটকে A^c বা A' দ্বারা প্রকাশ করা হয় গাণিতিকভাবে, $A' = U \backslash A = \{x: x \in U$ এবং $x \notin A\}$.

উদাহারণ: সার্বিক সেট $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A = \{1,3,5,7\}$

সুতরাং $A' = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\ \ \{1,3,5,7\}$

$= \{2,4,6,8,9\}$

কয়েকটি বিশেষ সংখ্যার সেট

$N = \{1,2,3, \dots \dots .\}$ অর্থাৎ সকল স্বাভাবিক সংখ্যা বা ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট।

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots.\}$ অর্থাৎ সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট

$Q = \{x : x = \frac{p}{q},$ যেখানে p যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা এবং q যে কোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা} অর্থাৎ সকল মূলদ সংখ্যার সেট।

$R = \{x : x$ বাস্তব সংখ্যা} অর্থাৎ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট}।

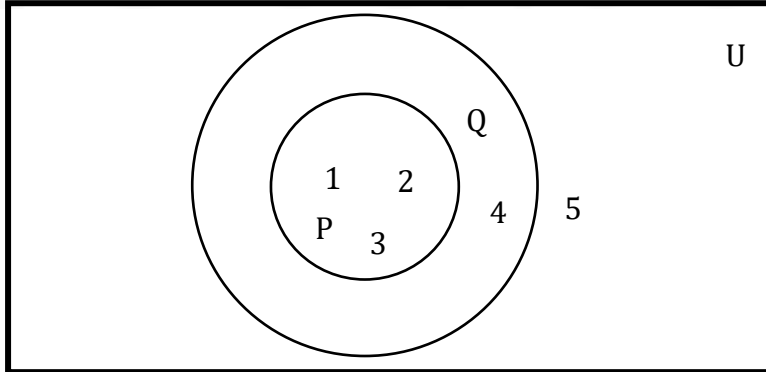
শক্তি সেট: কোন সেট A এর সকল উপসেটের সেটকে এর শক্তি সেট বা পাওয়ার সেট বলা হয় এবং একে P(A) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন: $A = \{1,2,3\}$ হলে, A এর শক্তি সেট,

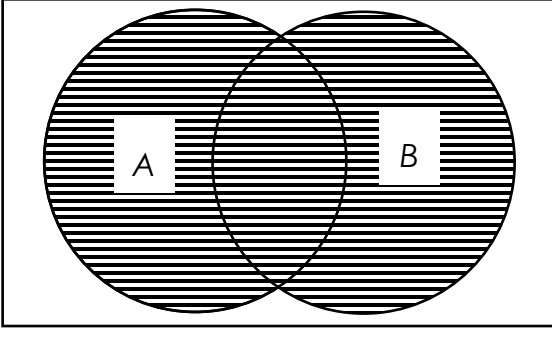
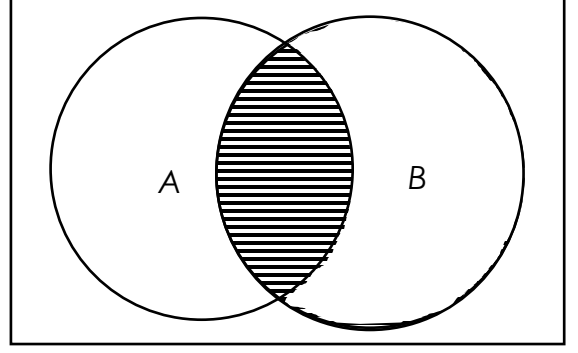
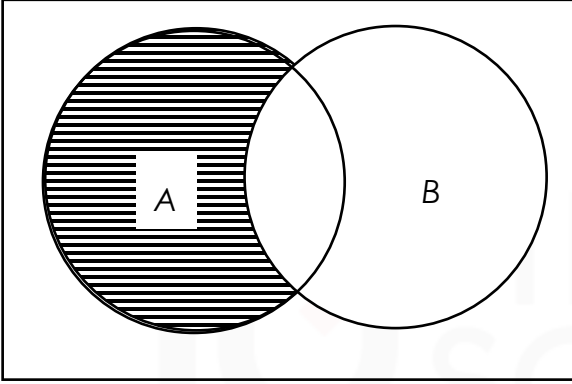
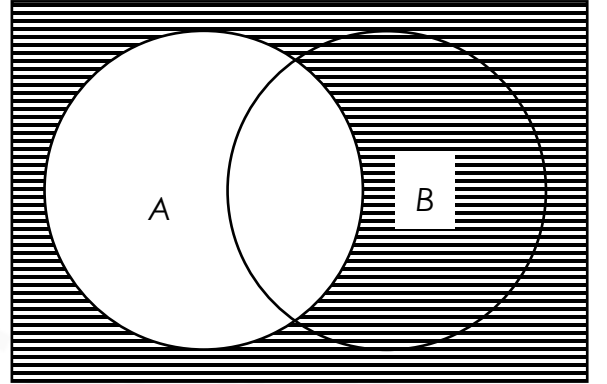
$P(A) = \{\emptyset. \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$

লক্ষনীয় যে, P(A) এর উপাদানগুলো প্রত্যেকেই A সেট এর উপসেট।

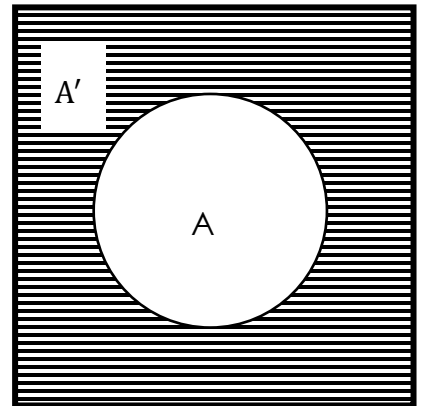
যদি কোন সেটের উপাদান সসীম হয়, ধরা যাক ঐ সেটে n সংখ্যক উপাদান আছে, তাহলে উক্ত সেটটির শক্তি সেটে 2^n সংখ্যক উপাদান থাকবে।

ভেনচিত্র: কোন সেটের একাধিক উপসেটের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করতে যে জ্যামিতিক চিত্র ব্যবহার করা হয়, তাকে ভেনচিত্র বলে। সাধারণত আয়তক্ষেত্র দ্বারা সার্বিক সেট বুঝানো হয়। বৃত্তাকার বা ত্রিভুজাকার উপসেট বোঝাতে ব্যবহার করা হয়।

উপরের ভেনচিত্রে U হলো সার্বিক সেট এবং P,Q এর উপসেট।

এখানে $P = \{1,2,3\};\ Q = \{1,2,3,4,\}; U = \{1,2,3,4,5\}$

ভেনচিত্রের মাধ্যমে আরও কয়েকটি সেটের প্রকাশ নিম্নে দেখানো হলো:

$A \cup B$ হল গাঢ় অংশটুকু

$A \cap B$ হল গাঢ় অংশটুকু

$A - B$, $A \setminus B$ হল গাঢ় অংশটুকু

$A' \cup B$ হল গাঢ় অংশটুকু

ভেনচিত্রের মাধ্যমে পূরক সেটের প্রকাশ:

A সেটের উপাদানগুলো বাদে সার্বিক সেটের অন্য সকল উপাদান নিয়ে A' গঠিত। ভেনচিত্রে A' দেখানো হলো। এখানে সার্বিক সেট U কে আয়তকার ক্ষেত্র দ্বারা এবং U এর উপসেট A কে বৃত্তাকার ক্ষেত্র দ্বারা দেখানো হয়েছে। চিত্রে A এর পূরক সেট A' কে দাগ টেনে ভরাট করে প্রকাশ করা হয়েছে।

বাস্তব সংখ্যা সম্পর্কিত কতগুলো প্রতীকের পরিচয়:

চিহ্ন/প্রতীক	চিহ্ন দ্বারা যা বোঝায়	বিবরণ	উদাহরণ
R	বাস্তব সংখ্যা (Real Number)	সকল মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা	$0, \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$, $\sqrt{3}$ ইত্যাদি
R_+	ধনাত্মক সংখ্যা (Positive Number)	শূন্য অপেক্ষা বড় সকল বাস্তব সংখ্যা	$1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{2}, 0.415$, $0.62, 4.120345061$ ইত্যাদি
R_-	ঋণাত্মক সংখ্যা (Negative Number)	শূন্য অপেক্ষা ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা	$-1, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\sqrt{2}$, $-0.415, -0.62$, -4.120345061 ইত্যাদি
Z	পূর্ণ সংখ্যা (Integers)	শূন্যসহ সকল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা	$\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ ইত্যাদি
Z^+	ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা (Positive Integers)	সকল ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা	1,2,3,4 ইত্যাদি
N	স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural Number)	সকল ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা	1,2,3,4 ইত্যাদি
Q	মূলদ সংখ্যা (Rational Number)	p ও q পূর্ণ সংখ্যা এবং $q \neq 0$ হলে $\frac{p}{q}$ আকারের সংখ্যা	$\frac{3}{1} = 3, \frac{11}{2} = 5.5$, $\frac{5}{3} = 1.666$ ইত্যাদি

বাস্তব সংখ্যা সম্পর্কিত কতগুলো প্রতীকের পরিচয়:

চিহ্ন/প্রতীক	চিহ্ন দ্বারা যা বোঝায়	বিবরণ	উদাহরণ
Q^c	অমূলদ সংখ্যা (Irrational Number)	$\frac{p}{q}$ যেখানে $q \neq 0$ আকারে প্রকাশ করা যায় না এমন সংখ্যা	$\sqrt{2} = 1.414213 \ldots., \sqrt{3} = 1.732 \ldots, \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.58113 \ldots.$ ইত্যাদি

ফাঁকা সেট (Empty Set)

অনেক সময় এরূপ সেট বিবেচনা করতে হয় যাতে কোনো উপাদান থাকে না। এরূপ সেটকে ফাঁকা সেট বলা হয় এবং $\emptyset$ অথবা $\{\}$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

সেট সমতা (Equality of Sets)

লক্ষ কর কোনো সেটে একই উপাদান বার বার থাকলেও সেটা একবার থাকার মতই বিবেচনা করা হচ্ছে। $A = B$ হয় যদি ও কেবল যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$ হয়।

সেটের অন্তর (Difference of Sets)

A ও B সেট বলে A\B সেটটি হচ্ছে $\{x: x \in A$ এবং $x \notin B\}$

A\B কে A বাদ B সেট বলা হয়।

সেটের সংযোগ (Union of Sets)

A ও B সেট হলে এদের সংযোগ সেট হচ্ছে $A \cup B = \{x: x \in A$ অথবা $x \in B\}$ অর্থাৎ A ও B উভয় সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটই $A \cup B$

সেটের ছেদ (Intersection of Sets)

A ও B সেট হলে এদের ছেদ সেট হচ্ছে $A \cap B$ অর্থাৎ A ও B উভয় সেটের সকল সাধারণ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটই $A \cap B$

নিশ্ছেদ সেট (Disjoint Set)

যদি A ও B সেট এমন হয় যে, $A \cap B = \emptyset$ তবে A ও B কে **নিশ্ছেদ সেট** বলা হয়।

কার্তেসীয় গুনজসেট (Cartesian Product Set)

দুইটি সেট A ও B এর কার্তেসীয় গুণজ $A \times B = \{(x, y): x \in A$ এবং $y \in B\}$

সূত্রের আলোচনা

সেট প্রক্রিয়ার ধর্মাবলি:

প্রতিজ্ঞা-১ বিনিময় বিধি (Commulative law): A ও B যেকোনো দুইটি সেট হলে

(i) $A \cup B = B \cup A$ (ii) $A \cap B = B \cap A$

প্রতিজ্ঞা-২ সহযোজন বিধি (Associative law): A ও B যেকোনো দুইটি সেট হলে

(i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

প্রতিজ্ঞা-৩ A যেকোনো সেট হলে-

(i) $A \cup A = A$ (ii) $A \cap A = A$

প্রতিজ্ঞা-৪ A ও B যেকোনো দুইটি সেটের জন্য

(i) যদি $A \subset B$ তখন $A \cup B = B$ এবং যদি $B \subset A$ তখন $A \cup B = A$

(ii) যদি $A \subset B$ তখন $A \cap B = B$ এবং যদি $B \subset A$ তখন $A \cap B = A$

প্রতিজ্ঞা-৫ যেকোনো সেট A ও B এর জন্য

(i) $A \subset (A \cup B)$ এবং $B \subset (A \cup B)$ (ii) $(A \cap B) \subset A$ এবং $(A \cap B) \subset B$

প্রতিজ্ঞা-৬ অভেদক বিধি (Identify law): A যেকোনো সেট, U সার্বিক সেট এবং ∅_শুন্য সেট হলে

(i) $A \cup \emptyset = A$ (ii) $A \cup U = U$

(iii) $A \cap U = A$ (iii) $A \cap \emptyset = \emptyset$

কুইক টিপস

$\boldsymbol{A \subset U}$ **এবং** $\emptyset \subset \boldsymbol{A}$ **সর্বদা সত্য।**

প্রতিজ্ঞা-৭ বণ্টন নিয়ম (Distribute law): A ও B যেকোনো দুইটি সেট হলে

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii)$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

প্রতিজ্ঞা-৮ দ্যা মরগানের সূত্র (De Mogans law): সার্বিক সেট U এর যেকোনো উপসেট A ও B এর জন্য

(i)$(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

প্রতিজ্ঞা-৯ সার্বিক সেট U এর যেকোনো উপসেট A ও B এর জন্য $A \backslash B = A \cap B'$

প্রমাণ: $A \backslash B = \{x: x \in A$ এবং $x \notin B\} = \{x: x \in A$ এবং $x \in B'\} = A \cap B'$

প্রতিজ্ঞা-১০ যেকোনো সেট A,B,C এর জন্য

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ (ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

প্রতিজ্ঞা-১১ সেট প্রক্রিয়া সংক্রান্ত কতিপয় প্রতিজ্ঞা

পাঠ্য বইয়ের সকল অংশে ' $\subset$ ' চিহ্ন দ্বারা প্রকৃত উপসেট বুঝানো হয়েছে। কিন্তু এখানে ' $\subseteq$ ' চিহ্ন দ্বারা উপসেট বোঝানো হয়েছে।

প্রতিজ্ঞা-ক: A যেকোনো সেট হলে $A \subseteq A$

প্রতিজ্ঞা-খ: ফাঁকা সেট $\emptyset$, যেকোনো সেট A এর উপসেট অর্থাৎ $\emptyset \subseteq A$ যেখানে A যে কোনো সেট।

প্রতিজ্ঞা-গ: A ও B যেকোনো সেট হলে, $A = B$ হয় যদি ও কেবল যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$ হয়।

প্রতিজ্ঞা-ঘ: যদি $A \subseteq \emptyset$ হয়, তবে $A = \emptyset$

প্রতিজ্ঞা-ঙ: যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq C$ হয়, তবে $A \subseteq C$

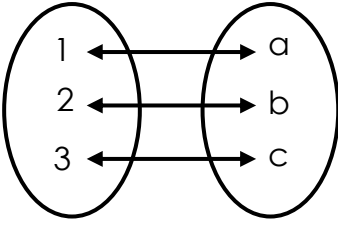
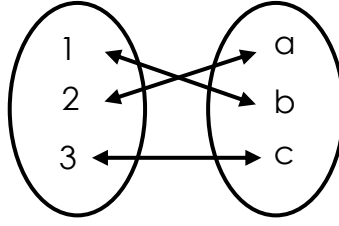
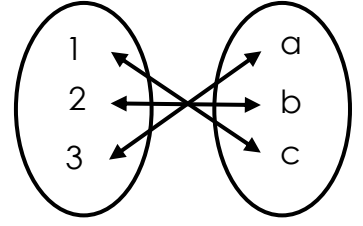
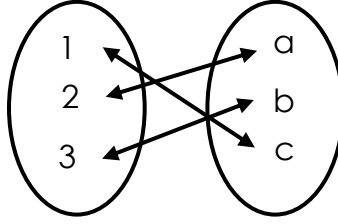
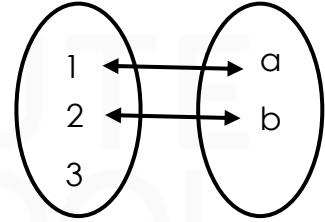
প্রতিজ্ঞা-চ: A এবং B যে কোনো সেট হলে, $A \cap B \subseteq A$, এবং $A \cap B \subseteq B$

প্রতিজ্ঞা-ছ: A এবং B যে কোনো সেট হলে, $A \subseteq A \cup B$ এবং $B \subseteq A \cup B$

এক-এক মিল: মনে করি $A = \{a, b, c\}$ তিনজন লোকের সেট (গ্রুপ) এবং $B = \{30,40,50\}$ ঐ তিনজন বয়সের সেট। অধিকন্তু মনে করি, a এর বয়স 30, b এর বয়স 40, c এর বয়স 50.
সুতরাং বলা যায় যে, A সেটের সাথে B সেটের এক-এক মিল আছে।

সংজ্ঞা: যদি A সেটের প্রতিটি উপাদানের সাথে B সেটের একটি ও কেবল একটি উপাদান এবং B সেটের প্রতিটি উপাদানের সাথে A সেটের একটি ও কেবল একটি উপাদানের মিল স্থাপন করা হয়, তবে তাকে A ও B সেটের মধ্যে একটি এক-এক মিল বলা হয়। A ও B এর মধ্যে এক-এক মিলকে সাধারণত $A \leftrightarrow B$ লিখে প্রকাশ করা হয় এবং A সেটের কোন সদস্য x এর সঙ্গে B সেটের যে সদস্য y এর মিল করা হয়েছে তা $x \leftrightarrow y$ লিখে বর্ণনা করা হয়।

সমতুল সেট (Equivalent sets):

মনে করি, A = {1,2,3} এবং B = {a,b,c} দুইটি সেট। নিচের চিত্রে A ও B সেটদ্বয়ের কতগুলো এক-এক মিল দেখানো হলো।

উপরের এক-এক মিলগুলোর মত আরো দুই প্রকারের এক এক মিল দেখানো যায়। অর্থাৎ A ও B এর মধ্যে সর্বমোট ছয়ভাবে এক এক মিল দেখানো যায়। এই ছয়প্রকারের মধ্যে যেকোনো এক প্রকারের এক এক মিল স্থাপন করা সম্ভব হলেই A ও B সেটদ্বয়কে সমতুল সেট বলা যায়। কিন্তু নিম্নের সেট দুটি সমতল নয় কারণ এর এক এক মিল দেখানো সম্ভব নয়।

সমতুল নয়

A = {1,2,3} B = {a,b}

সংজ্ঞা: যেকোনো সেট A ও B এর মধ্যে যদি একটি এক-এক মিল $A \leftrightarrow B$ বর্ণনা করা যায় তবে A ও B কে সমতুল সেট বলা হয়। একে $A \sim B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সূত্রের আলোচনা

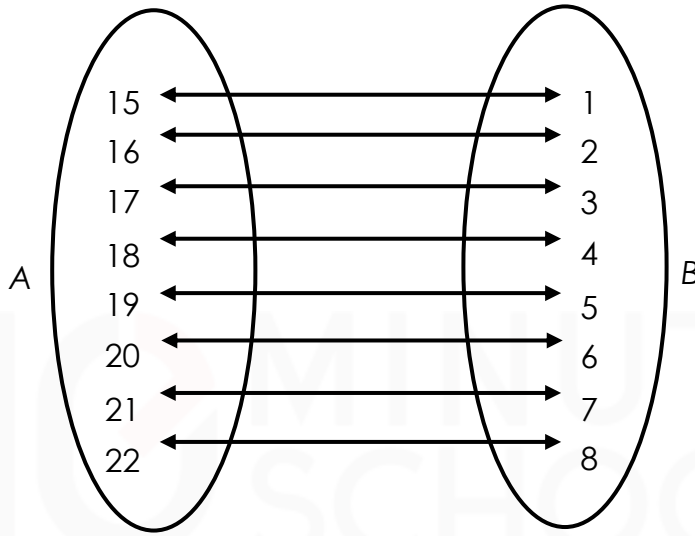
প্রতিজ্ঞা-১: প্রত্যেক সেট A তার নিজের সমতুল।

প্রতিজ্ঞা-২: যদি A ও B সমতুল সেট হয় এবং B ও C সমতুল সেট হয়, তবে A ও C সমতুল সেট হয়।

প্রতিজ্ঞা-৩ যদি A সান্ত সেট হয় এবং B,A এর প্রকৃত উপসেট হয়, তবে B সান্ত সেট এবং $n(B) < n(A)$ হবে

প্রতিজ্ঞা-৪ A অনন্ত সেট হয় যদি ও কেবল যদি A ও A এর একটি প্রকৃত উপসেট সমতুল হয়। সুতরাং কোনো সেট ও তার কোন প্রকৃত উপসেট কখনই সমতুল হতে পারে না।

সান্ত ও অনন্ত সেট (Finite and Infinite Sets)

$A = \{15,16,17,18,19,20,21,22\}$ সেটেটির সদস্যগুলো গণনা করে দেখা যায় যে, A সেটের সদস্য সংখ্যা ৪। এই গণনার কাজ A সেটের সঙ্গে সেটের $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ সেটের একটি এক-এক মিল স্থাপন করে সম্পন্ন করা হয়। যেমন, নিচের চিত্রে দেখানো হয়েছে।

সংজ্ঞা (সান্ত ও অনন্ত সেট): গণনা করে যে সকল সেটের সদস্য সংখ্যা নির্ধারণ করা যায়, এদের সান্ত সেট বলা হয়। কোন সেট A সান্ত না হলে, একে অনন্ত সেট বলা হয়।

ক) ফাঁকা সেট $\emptyset$ সান্ত সেট, এর সদস্য সংখ্যা 0।

খ) যদি কোন সেট A এবং $J_m = \{1,2,3, \dots, m\}$ সমতুল হয়, যেখানে $m \in N$, তবে A একটি সান্ত সেট এবং A এর সদস্য সংখ্যা m।

গ) A কোনো সান্ত সেট হলে, A এর সদস্য সংখ্যাকে $n(A)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

কুইক টিপস

ক) $J_1 = \{1\}, J_2 = \{1,2\}, J_3 = \{1,2,3\}$ ইত্যাদি প্রত্যেককেই N এর শান্ত উপসেট বলা হয় এবং $n(J_1) = 1, n(J_2) = 2, n(J_3) = 3$ ইত্যাদি। বাস্তবিক পক্ষে, $J_m \sim J_m$ এবং $n(J_m) = m$।

খ) শুধুমাত্র সান্ত সেটেরই সদস্য সংখ্যা নির্দিষ্ট করা যায়। $n(A)$ লিখলে বুঝতে হবে A সান্ত সেট।

গ) A ও B সমতুল সেট এবং এদের মধ্যে একটি সেট সান্ত হলে অপর সেটটিও সান্ত হবে এবং $n(A) = n(B)$ হবে।

অন্বয় (Relation)

অনেক সময় আমরা সেট X এর উপাদান গুলোর মধ্যে অথবা সেট X ও সেট Y এর উপাদান গুলোর মধ্যে বিভিন্ন সম্পর্ক বিবেচনা করি। যেমন, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N এ বড়-ছোট সম্পর্ক, কোন পরিবারে ভাই বোন সম্পর্ক, তোমার শ্রেণীর শিক্ষার্থীদের সঙ্গে সর্বশেষ জন্মদিনে তাদের বয়সের সম্পর্ক এ প্রসঙ্গে নবম- দশম শ্রেণীর গণিত বই দ্রষ্টব্য।

ফাংশন (Function)

সংজ্ঞা (ফাংশন): যদি X ও Y সেট হয় এবং কোনো নিয়মের অধীনে X সেটের প্রত্যেক উপাদানের সঙ্গে Y সেটের একটি ও কেবল একটি উপাদানকে সংশ্লিষ্ট করা হয় তবে ঐ নিয়মকে X থেকে Y এ বর্ণিত একটি ফাংশন বলা হয়।

সংজ্ঞা (ডোমেন ও কোডেমেন): যদি X সেট হতে Y সেটে f একটি ফাংশন হয়, তবে তাকে $f{:}X \longrightarrow Y$ লিখে প্রকাশ করা হয়। X সেটকে $f{:}X \longrightarrow Y$ ফাংশনের ডোমেন (domain) এবং Y সেট কে এর কোডোমেন (codomain) বলা হয়।

সংজ্ঞা (প্রতিবিম্ব ও প্রাক প্রতিবিম্ব): যদি $f{:}X \longrightarrow Y$ ফাংশন এর অধীনে $x \in X$ এর সাথে $x \in Y$ সংশ্লিষ্ট হয়, তবে এই ফাংশন এর অধীনে y কে x এর **প্রতিবিম্ব বা ইমেজ (image)** এবং x কে y এর **প্রাক প্রতিবিম্ব (Preimage)** বলা হয় এবং y = f(x) লিখে তা প্রকাশ করা হয়।

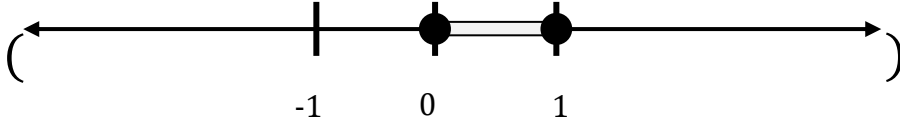
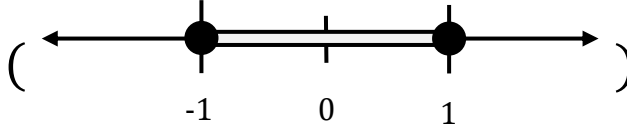
সংজ্ঞা (রেঞ্জ): $f{:}X \longrightarrow Y$ ফাংশন এর অধীনে Y এর যে সকল উপাদান X এর কোন উপাদানের ইমেজ হয়, এদের সেটকে ফাংশনের **রেঞ্জ (range)** বলা হয় এবং "রেঞ্জ f " দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ রেঞ্জ $f =$ $\{y{:}y = f(x)$ যেখানে $x \in X\} = \{f(x){:}x \in X\}$। লক্ষণীয় যে রেঞ্জ f কোডোমেন Y এর উপসেট।

বন্ধনীর ব্যবহার

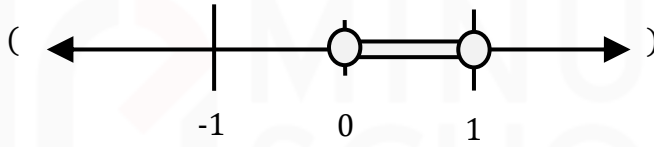
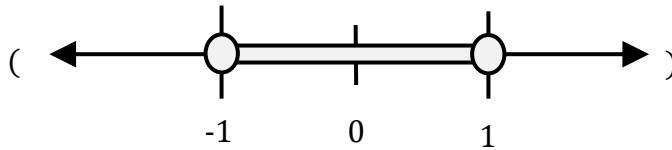
কোন ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জকে সাধারণত ব্যবধি আকারে প্রকাশ করা হয়। ব্যবধিতে প্রথম বন্ধনী '()' এবং তৃতীয় বন্ধনী '[]' কিংবা উভয়টি যুগপতভাবে ব্যবহার করা হয়। এক্ষেত্রে তৃতীয় বন্ধনী দ্বারা '[]' অন্তর্ভুক্ত এবং প্রথম বন্ধনী দ্বারা '()' অন্তর্ভুক্ত নয় এমন সংখ্যা নির্দেশ করে।

সুতরাং (ক) ৩য় বন্ধনী [] দ্বারা কোনো ব্যবধি আবদ্ধ হলে ব্যাবধির সবগুলো সংখ্যাই এর অন্তর্ভুক্ত।

★ উদাহরণ

[0,1] এর অর্থ হলো ব্যবধিতে 0 ও 1 সহ এর মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যাই ব্যবধির অন্তর্ভুক্ত।

[-1,1] এর অর্থ হলো ব্যবধিতে -1 ও 1 সহ এর মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যাই ব্যবধির অন্তর্ভুক্ত।

১ ম বন্ধনী দ্বারা '()' কোন ব্যবধি আবদ্ধ হলে শুধু ব্যবধির ১ম ও শেষ অর্থাৎ দুই প্রান্তের সংখ্যাদ্বয় ব্যবধির অন্তর্ভুক্ত নয়।

★ উদাহরণ

(0,1) এর অর্থ হলো ব্যবধিতে ১ম ও শেষ সংখ্যা অর্থাৎ 0 ও 1 বিন্দু ছাড়া সকল বিন্দুই ব্যবধির অন্তর্ভুক্ত

(-1,1) এর অর্থ হলো ব্যবধির ১ম ও শেষ সংখ্যা অর্থাৎ -1 ও 1 বিন্দু ছাড়া সকল বিন্দুই ব্যবধির অন্তর্ভুক্ত

১ম ও ৩য় যুগপৎ ব্যবহার: কোনো ব্যবধিতে ১ম ও ৩য় বন্ধনী যুগপৎভাবে ব্যবহৃত হতে পারে এক্ষেত্রে মনে রাখবে-

১ম বন্ধনীর চিহ্ন দ্বারা আবদ্ধ সংখ্যাটি ব্যবধির অন্তর্ভুক্ত নয়।

৩য় বন্ধনীর চিহ্ন দ্বারা আবদ্ধ সংখ্যাটি ব্যবধির অন্তর্ভুক্ত।

উদাহরণ :

[0,1) ব্যবধিতে 0 অন্তর্ভুক্ত কিন্তু 1 নয়।

(0,1] ব্যবধিতে 0 অন্তর্ভুক্ত নয় কিন্তু 1অন্তর্ভুক্ত।

কুইক টিপস

অসীম নির্দেশক প্রতীক '∞' সর্বদা প্রথম বন্ধনী দ্বারা আবদ্ধ হয়, কখনোই '∞' প্রতীককে তৃতীয় বন্ধনী দ্বারা আবদ্ধ করা যাবে না।

উদাহরণ: $(0,\infty)$, $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$, $(-\infty,1)$, $(-\infty, \infty)$, ইত্যাদি।

প্রথম বন্ধনীকে খোলা ব্যবধি এবং তৃতীয় বন্ধনী কে বদ্ধ ব্যবধি বলা হয়।

অনেক সময় খোলা ব্যবধীতে প্রথম বন্ধনীর পরিবর্তে] [প্রতীক ব্যবহার করা হয়।

অসংজ্ঞায়িত রূপ:

কোন ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল এর বাস্তব মান পাওয়া যায় না। যেমন: $\sqrt{-2}, \sqrt{-3}$, $\sqrt{-5}, \sqrt{-9}, \sqrt{-16}$ ইত্যাদির বাস্তব মান পাওয়া যায় না।

সুতরাং বর্গমূলের ভেতরে অবস্থানকারী সংখ্যা বা রাশিকে অবশ্যই অঋণাত্মক হতে হবে।

কোনো সংখ্যা বা রাশিকে শূন্য দ্বারা ভাগ করলে বাস্তব মান পাওয়া যায় না। যেমন: $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{2}{0} = \infty, \frac{x}{0} = \infty, \frac{-1}{0} = \infty, \frac{2x+3}{0} = \infty$,

ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়:

অন্বয়ের ডোমেন ও রেঞ্জ: কোন অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেটকে অন্বয়ের ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটকে রেঞ্জ বলে।

উদাহরণ : $S = (-3,-3)(-1,-1), (0,0), (1,2)$, ও $(2,4)$ একটি অন্বয়।

অন্বয়ের ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদানসমূহের সেট $\{-3,-1,0,1,2\}$

এবং অন্বয়ের দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেট $\{-3,-1,0,1,2,4\}$

$\therefore S$ অন্বয়ের ডোমেন $\{-3,-1,0,1,2\}$ এবং রেঞ্জ $\{-3,-1,0,1,2,4\}$

ফাংশনের ডোমেন: $y = f(x)$ ফাংশনের ডোমেন বা আধার হলো x এর সে সকল মানের সেট যার জন্য $f(x)$ এর মান নির্ণয় সম্ভব।

ফাংশনের রেঞ্জ: $y = f(x)$ ডোমেন এর জন্য এর যে সকল বাস্তব মন পাওয়া যায় এদের সেটকে রেঞ্জ বলে। অর্থাৎ $f(x)$ এর মানই রেঞ্জ।

ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়: সাধারণভাবে $y = f(x)$ ফাংশনের x এর মানকে ডোমেন এবং x এর জন্য প্রাপ্ত $f(x)$ বা y এর মান কে রেঞ্জ বলে। নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হলো।

(ক) $f(x) = x$ ফাংশনের ক্ষেত্রে-

ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। অতএব, ফাংশনের ডোমেন = R

x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায়। ∴ ফাংশনের রেঞ্জ= R

(খ) $f(x) = x^2$ ফাংশনের ক্ষেত্রে-

ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। অতএব, ফাংশনের ডোমেন= R

X এর সকল বাস্তব মানের (ধনাত্মক, ঋণাত্মক) জন্য $f(x)$ এর মান অঋণাত্মক সংখ্যা অর্থাৎ কখনোই শূন্য থেকে ছোট হবে না।

অতএব, ফাংশনের রেঞ্জ $= [0, \infty)$

(গ) $f(x) = \sqrt{x}$ ফাংশনের ক্ষেত্রে-

আমরা জানি, ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূলের বাস্তব মান পাওয়া যায় না। অতএব,$f(x) = \sqrt{x}$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে। অতএব ফাংশনের ডোমেন$= [0, \infty)$

ফাংশনের ডোমেন অর্থাৎ $x \in [0, \infty)$ এর জন্য $f(x)$ অর্থাৎ এর মান কখনোই ঋণাত্মক হবে না। অর্থাৎ $f(x) \geq 0$। অতএব ফাংশনের রেঞ্জ$= [0, \infty)$

বিকল্প পদ্ধতিতে ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয়: সাধারণভাবে ডোমেন নির্ণয় অধিকতর সহজ। কোনো ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ যথাক্রমে বিপরীত ফাংশনের রেঞ্জ ও ডোমেন।

অর্থাৎ মূল ফাংশনের ডোমেন= বিপরীত ফাংশন এর রেঞ্জ।

আবার, মূল ফাংশনের রেঞ্জ= বিপরীত ফাংশনের ডোমেন।

সুতরাং কোনো ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয় অর্থ হলো বিপরীত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয়। নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টি ব্যাখ্যা করা হলো।

(ক) মূল ফাংশন $y = x^2$

বিপরীত ফাংশন $y = x^2$

বা, $x^2 = y$

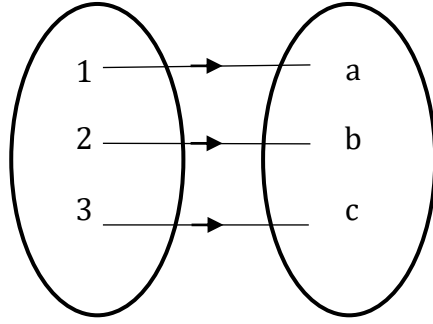
বা, $x = \pm\sqrt{y}$

$\therefore f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$

$f^{-1}(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যাবে যদি $x \geq 0$ হয়

$\therefore$ বিপরীত ফাংশন এর ডোমেন$= [0, \infty)$ অর্থাৎ মূল ফাংশনের রেঞ্জ $= [0, \infty)$

এক-এক ফাংশন (One-One Function)

নিচের ভেনচিত্রে f ফাংশনের অধীনে ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিবিম্ব সর্বদা ভিন্ন।

$f^{-1}(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যাবে যদি $x \geq 0$ হয়

$\therefore$ বিপরীত ফাংশন এর ডোমেন$= [0, \infty)$ অর্থাৎ মূল ফাংশনের রেঞ্জ $= [0, \infty)$

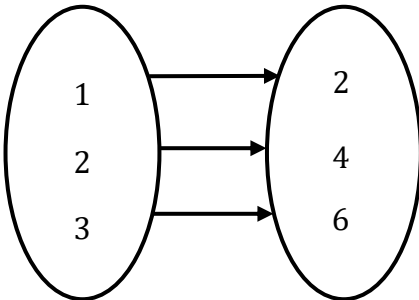
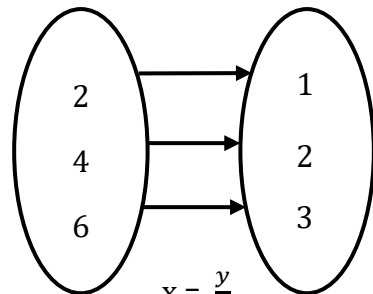
এক-এক ফাংশন (One-One Function)

নিচের ভেনচিত্রে f ফাংশনের অধীনে ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিবিম্ব সর্বদা ভিন্ন।

যদি কোন ফাংশন f এর অধীনে এর ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিবিম্ব সর্বদা ভিন্ন হয়, তবে ফাংশনটিকে এক-এক ফাংশন (one-one) বলা হয়। অর্থাৎ

$x_1, x_2 \in$ ডোম f এবং $x_1 \neq x_2$ হলে $f(x_1) \neq f(x_2)$।

অথবা $x_1, x_2 \in$ ডোম f এবং $x_1 = x_2$ হলে $f(x_1) = f(x_2)$

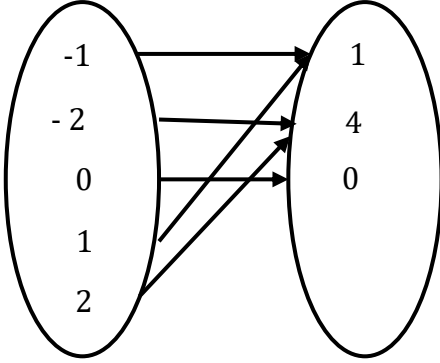
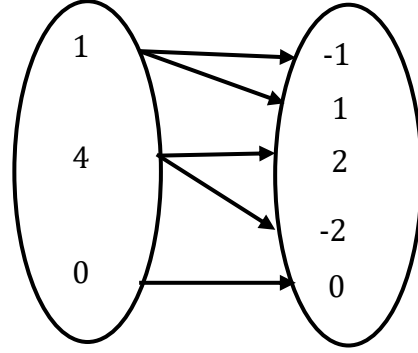
সার্বিক ফাংশন বা অনটু ফাংশন (Onto-function): কোনো অন্বয় এবং তার বিপরীত অন্বয় উভয়ই ফাংশন হলে ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন।

ফাংশনঃ $= 2x$

$\therefore$ ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন। বিপরীত অন্বয় ও ফাংশন

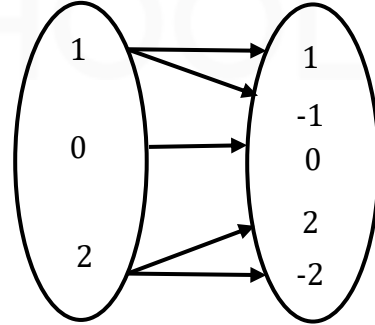
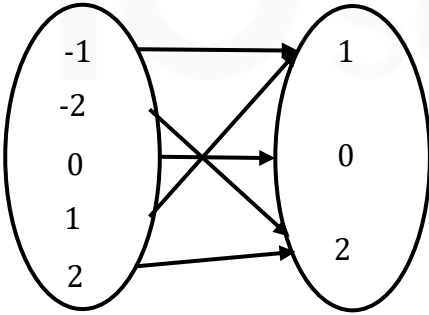
$f^{-1}(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যাবে যদি $x \geq 0$ হয়

$\therefore$ বিপরীত ফাংশন এর ডোমেন $= [0, \infty)$ অর্থাৎ মূল ফাংশনের রেঞ্জ $= [0, \infty)$

এক-এক ফাংশন (One-One Function)

নিচের ভেনচিত্রে f ফাংশনের অধীনে ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিবিম্ব সর্বদা ভিন্ন।

খ)

ফাংশন: $y = x^2$

বিপরীত অন্বয় ফাংশন নয়, কারণ,x এর একটি উপাদান y এর দুইটি মানের সাথে সম্পর্কিত

$\therefore y = x^2$ ফাংশন সার্বিক নয়।

অতএব, $y = |x|$ ফাংশন সার্বিক ফাংশন নয়।

কুইক টিপস

উল্লেখ্য যে,

$y = x^2$ ফাংশনটি $R_+ \rightarrow R_+$ শর্তাধীনে এক-এক ও সার্বিক

$y = |x|$ ফাংশনটি $R_+ \rightarrow R_+$ শর্তাধীনে এক-এক ও সার্বিক

সকল একঘাত বিশিষ্ট সরলরৈখিক ফাংশনই এক-এক এবং সার্বিক।

দ্বিঘাতবিশিষ্ট ফাংশন শর্তসাপেক্ষে এক-এক এবং সার্বিক।

বিপরীত ফাংশন: মনে করি $f: A \rightarrow B$ একটি এক-এক এবং অনটু ফাংশন। তা হলে একটি ফাংশন $f^{-1}B \rightarrow A$ বিদ্যমান আছে যেখানে প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য একটি অনন্য $f^{-1}(b) \in B$বিদ্যমান। তবে f^{-1}কে f এর বিপরীত ফাংশন বলা হয়।

উদাহরণ: $f(x) = 3x + 1$ এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x - 1)$

বিকল্প সংজ্ঞা: $f: A \rightarrow B$ এবং উভয়েই এক-এক এবং অনটু ফাংশন। তাহলে g কে এর বিপরীত ফাংশন বলা হবে যদি $f(g(x) = g(f(x) = x$ হয়, যেখানে $f(x) \in B$ এবং $g(x) \in A$ এবং $g = f^{-1}$

কুইক টিপস

কোনো ফাংশন এক-এক এবং সার্বিক হলেই শুধুমাত্র বিপরীত ফাংশন পাওয়া যায়।

বিপরীত ফাংশন নির্ণয়ের নিয়ম: আমরা জানি, কোনো ফাংশনের বিপরীত ফাংশন পাওয়া যাবে যদি তা এক-এক এবং সার্বিক হয়। তাই প্রথমে ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক কিনা তা যাচাই করতে হবে। অতঃপর নিম্নোক্ত যে কোনো পদ্ধিটতে বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করা যাবে।

উদাহরণ: $f(x) = 2x + 3$ ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক।

পদ্ধতি-১:

ধরি, $y = f(x) = 2x + 3$

এখন, $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \ldots \ldots (1)$

আবার, $y = 2x + 3$

$\Rightarrow y - 3 = 2x$

$\Rightarrow x = \frac{y-3}{2}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

পদ্ধতি-২:

ধরি $y = 2x + 3$

X ও y পরস্পর প্রতিস্থাপন করে পাই

$x = 2y + 3$

$\Rightarrow 2y = x - 3$

$\Rightarrow y = \frac{x-3}{2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

পদ্ধতি-৩:

দেওয়া আছে, $f(x) = 2x + 3$

X এর পরিবর্তে $f^{-1}(x)$ বসিয়ে পাই

$\Longrightarrow f\big(f^{-1}(x)\big) = 2.f(x) + 3$

$\Longrightarrow x = 2.f^{-1}(x) + 3$ $\quad [\because f(f^{-1}(x) = x]$

$\Longrightarrow 2.f^{-1}(x) = x - 3$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

সরলরৈখিক ফাংশন:

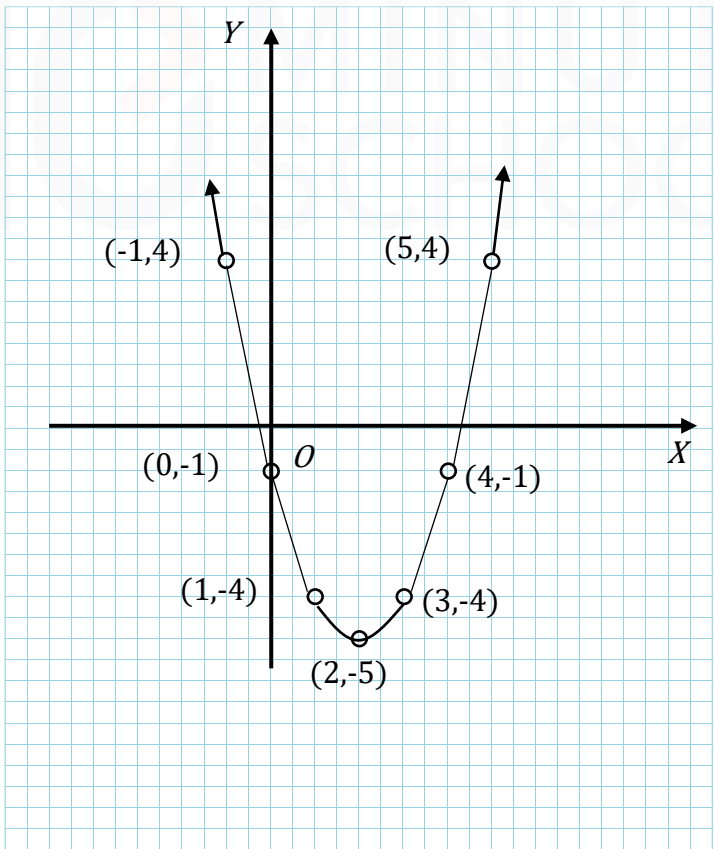
সরলরৈখিক ফাংশন এর সাধারণ রূপ হলো $f(x) = mx + b$ যেখানে, m এবং b বাস্তব সংখ্যা। এর লেখচিত্র একটি রেখা যার ঢাল হলো m এবং y অক্ষের ছেদক b।

দ্বিঘাত ফাংশন (Quadratic Function)

দ্বিঘাত ফাংশন হলো একটি ফাংশন যা $y = ax^2 + bx + c$ সমীকরণ দ্বারা বর্ণিত যেখানে a ও b বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$

ক) লেখচিত্র পরাবৃত্ত আকারের।

খ) লেখচিত্রটির অক্ষের সমান্তরাল রেখা বা অক্ষ বরাবর প্রতিসাম্য বিন্দু পাওয়া যাবে।

x	$x^2 - 4x - 1$	y
-1	$(-1)^2 - 4(-1) - 1$	4
0	$(0)^2 - 4(0) - 1$	-1
1	$(1)^2 - 4(1) - 1$	-4
2	$(2)^2 - 4(2) - 1$	-5
3	$(3)^2 - 4(3) - 1$	-4
4	$(4)^2 - 4(4) - 1$	-1
5	$(5)^2 - 4(5) - 1$	4

বৃত্তের লেখচিত্র

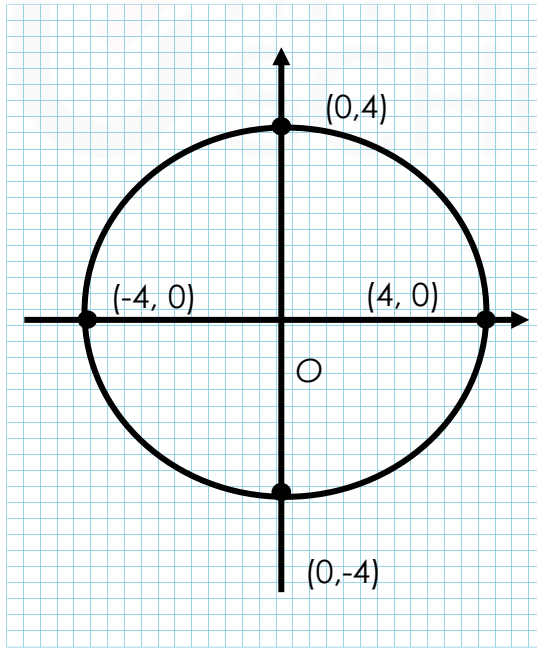
উল্লেখ্য যে, p, q ও r ধ্রুবক এবং $r \neq 0$ হলে R এ $S = \{(x, y): (x - p)^2 + (y - p)^2 = r^2\}$ অন্বয়ের লেখ একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র (p,q) এবং ব্যাসার্ধ r (নবম- দশম শ্রেণীর গণিত দ্রষ্টব্য)। ছক কাগজে (p,q) বিন্দু পাতন করে ঐ বিন্দু কে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অংকন করেন লেখচিত্রটি পাওয়া যায়।

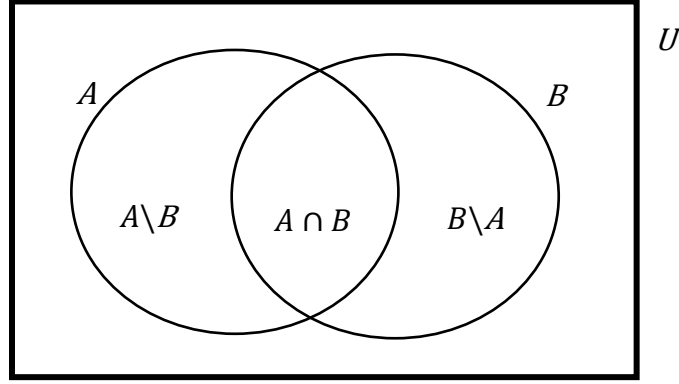
মন্তব্য: যে অন্বয়ের সমাধান সেট অসীম, এর লেখচিত্র অঙ্কনের স্বীকৃত পদ্ধতি হলো যথেষ্ট সংখ্যক সমাধানের প্রতিরূপী বিন্দু ছক কাগজে পাতন করে সাবলীলভাবে ঐসব বিন্দু যোগ করা, যাতে অন্বয়টির লেখচিত্রের ধরন ব্যর্থহীনভাবে বুঝা যায়। কিন্তু যে অন্বয়ের লেখচিত্র বৃত্ত, এর জন্য কম্পাস ব্যবহার করলে কাজ সহজ ও সুন্দর হয় বিধায় শেষোক্ত পদ্ধতি অবলম্বন করা হলো।

উত্তরমালা

$S = \{(x, y: x^2 + y^2 = 16\}$

সুতরাং S এর লেখচিত্র একটি বৃত্ত, $x^2 + y^2 = 4^2$ যার কেন্দ্র (0,0) এবং ব্যাসার্ধ $r = 4$।

S এর লেখচিত্র নিম্নে দেখানো হলো:

প্রতিজ্ঞা ৯: যেকোনো সান্ত সেট A ও B এর জন্য $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

প্রমাণ: এখানে, $A\backslash$B, $A \cap B$ এবং $B\backslash$A সেট তিনটি পরস্পর নিশ্ছেদ সেট **[ভেনচিত্র দ্রষ্টব্য]**।

ফলে $A = (A\backslash B) \cup (A \cap B)$ এবং $B = (B\backslash A) \cup (A \cap B)$

অতএব, $A \cup B = (A\backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B\backslash A)$

$n(A) = n(A\backslash B) + n(A \cap B) \dots\dots (1)$

$\therefore n(B) = n(B\backslash A) + n(A \cap B) \dots\dots (2)$

$\therefore n(A \cup B) = n(A\backslash B) + n(A \cap B) + n(B\backslash A) \dots\dots (3)$

সুতরাং, (1) নং হতে পাই, $n(A\backslash B) = n(A) - n(A \cap B)$

এবং, (2) নং হতে পাই, $n(B\backslash A) = n(B) - n(A \cap B)$

এখন $n(A\backslash B)$ এবং $n(B\backslash A)$ এ বসিয়ে পাই,

$n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cap B)$

Σ সূত্রের আলোচনা

$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

প্রতিজ্ঞা ১. (ডি মরগ্যানের সূত্র). সার্বিক সেট U এর যেকোন উপসেট A ও B এর জন্য

ক) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ খ) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

প্রমাণ:

ক) মনে করি, $x \in (A \cup B)'$ তাহলে, $x \notin (A \cup B)$।

$\Rightarrow x \notin A$ এবং $x \notin B \Rightarrow x \in A'$ এবং $x \in B' \Rightarrow x \in A' \cap B'$

$\therefore (A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$

আবার মনে করি, $x \in A' \cap B'$। তাহলে, $x \in A'$ এবং $x \in B'$

$\Rightarrow x \notin A$ এবং $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in (A \cup B)'$

$\therefore A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$

সুতরাং, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

প্রতিজ্ঞা ২. সার্বিক সেট U এর যেকোনো উপসেট A ও B এর জন্য $A \backslash B = A \cap B'$

প্রমাণ: মনে করি, $x \in A \backslash B$। তাহলে, $x \in A$ এবং $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B'$ এবং $x \in A \cap B'$

$\therefore A \backslash B \subseteq A \cup B'$

আবার মনে করি, $x \in A \cap B'$। তাহলে, $x \in A$ এবং $x \in B'$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \notin B \Rightarrow x \in A \backslash B$

$\therefore A \cap B' \subseteq A \backslash B$

সুতরাং, $A \backslash B = A \cup B'$

প্রতিজ্ঞা ৩. যেকোনো সেট A,B,C এর জন্য

ক) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

খ) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

প্রমাণ:

ক) সংজ্ঞানুসারে, $A \times (B \cap C)$

$= \{(x, y): x \in A,\ y \in B \cap C\}$

$= \{(x, y): x \in A,\ y \in B$ এবং $y \in C\}$

$= \{(x, y): (x, y) \in A \times B$ এবং $(\mathrm{x}, y) \in A \times C)\}$

$= \{(x, y): (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)\}$

$\therefore A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$

আবার,

$(A \times B) \cap (A \times C)$

$= \{(x, y): (x, y) \in A \times B$ এবং $(x, y) \in A \times C\}$

$= \{(x, y): x \in A,\ y \in B$ এবং $(x \in A,\ y \in C\}$

$= \{(x, y): x \in A, y \in B \cap C\}$

$= \{(x, y): (x, y) \in A \times (B \cap C)\}$

$\therefore (A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$

সুতরাং, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

সম্ভাব্য প্রশ্ন

৯। দেখাও যে, (ক) $A \backslash A = \emptyset$ (খ) $A \backslash (A \backslash A) = A$

(ক) এর সমাধান:

ধরি, $x \in A \backslash A$

তাহলে, $x \in A$ এবং $x \notin A$

$\Rightarrow x \in \emptyset \quad \therefore A \backslash A \subseteq \emptyset$

আবার, ধরি,$x \in \emptyset$

তাহলে, $x \in A$ এবং $x \notin A$

$\Rightarrow x \in A \backslash A$

$\therefore \emptyset \subset A \backslash A$

সুতরাং $A \backslash A \subseteq \emptyset$ [যেহেতু $A \subset \emptyset$ হলে $A = \emptyset$]

[দেখানো হলো]

(খ) এর সমাধান:

ধরি, $x \in A \backslash (A \backslash A)$

তাহলে, $x \in A$ এবং $x \notin (A \backslash A) \Rightarrow x \in A$ এবং $x \notin \emptyset$ [$\because A \backslash A = \emptyset$]

$\Rightarrow x \in A \backslash \emptyset$

$\Rightarrow x \in A \quad \therefore A \backslash (A \backslash A) \subseteq A$

আবার, ধরি, $x \in A$

তাহলে, $x \in A$ এবং $x \notin \emptyset$ [$\because A \backslash A = \emptyset$]

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \notin (A \backslash A)$

$\Rightarrow x \in A \backslash (A \backslash A)$

$\therefore A \subseteq A \backslash (A \backslash A)$

সুতরাং, $A\backslash(A\backslash A) = A$ **[দেখানো হলো]**

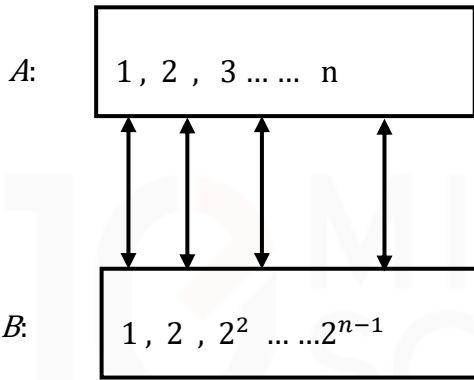
১০। দেখাও যে, $\mathbf{A} = \{\mathbf{1, 2, 3, \ldots \ldots} \boldsymbol{n}\}$ এবং $\mathbf{B} = \{\mathbf{1, 2, 2^2, \ldots \ldots 2^{n-1}}\}$ সেট দুইটি সমতুল।

সমাধান: দেওয়া আছে, $A = \{1,2,3 \ldots \ldots n\}$

এবং $\mathrm{B} = \{1,2,2^2, \ldots \ldots 2^{n-1}\}$

A ও B সেটদ্বয়ের মধ্যে একটি এক-এক মিল নিম্নে দেখানো হলো: আমরা জানি, দুটি সেটের মধ্যে এক-এক মিল দেখানো গেলে বোঝা যাবে সেটদ্বয় সমতুল বা Equivalent set.

এখানে, $n = 1$ হলে $2^{1-1} = 2^0 = 1$

$n = 2$ হলে $2^{2-1} = 2^1 = 2$

সুতরাং সেট দুইটি সমতূল।

ওপরের চিত্রিত এক এক মিলটিকে

$\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B}: \mathrm{n} \leftrightarrow 2^{n-1}, n \in N$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

১১: যদি $\mathbf{A} \subset \boldsymbol{B}$ এবং $\mathbf{C} \subset \boldsymbol{D}$ হয়, তবে দেখাও যে $(\mathbf{A} \times \boldsymbol{C}) \subset (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{D})$

সমাধান:

উপসেটের সংজ্ঞা হতে জানি,

$A \subset \mathrm{B}$ হলে $\mathrm{x} \in \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{B}$

অনুরূপভাবে, $\mathrm{y} \in \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{y} \in \mathrm{D}$

ধরি, $(x, y) \in (A \times C)$

তাহলে, $\mathrm{x} \in A, \mathrm{y} \in C$

$\Rightarrow x \in B, \mathrm{y} \in D$

$\Rightarrow (x, y) \in (B \times D)$ [$\because A \subset B$ এবং $C \subset D$]

$\therefore (A \times C) \subset (B \times D)$ **[দেখানো হলো]**

১২। প্রমাণ কর যে, $n(A) = p, n(B) = q$ এবং $A \cap B = \Phi$ হলে $n(A \cup B) = p + q$.

সমাধান: আমারা জানি, যে কোন সেট A ও B এর জন্য

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

এখানে, $n(A) = p, n(B) = q$ এবং $A \cap B = \Phi$

$\therefore (A \cap B) = 0$

$\therefore n(A \cup B) = p + q - 0$

$= p + q$

$\therefore n(A \cup B) = p + q$ **(প্রমাণিত)**

কুইক টিপস

$n(A)$ বলতে A সেটের সদস্য সংখ্যা বোঝায়

১৩। প্রমাণ কর যে, A,B,C সান্ত সেট হলে $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - (A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

সমাধান:

আমারা জানি, যে কোন সান্ত সেট A ও B এর জন্য

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

এখন, $n(A \cup B \cup C) = n[A \cup (B \cup C)]$ $\because$ [$(A \cup B \cup C) = A \cup (B \cup C)$ সহযোজন নিয়ম]

$= n(A) + n(B \cup C) - n[A \cap (B \cup C)]$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

[$\because A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$]

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n\ (A \cap B) \cap (A \cap C)]$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n\ (A \cap B \cap C)]$

[$\because (A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap B \cup C)$]

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)]$

$[\because (A \cap C) = (C \cap A)]$

$\therefore n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - (A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$ **(প্রমাণিত)**

টাইপ ভিত্তিক সমস্যাবলী

Type 1: তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর

Model Ex 1: $A = \{x \in N: x^2 > 4$ **এবং** $x^3 < 125\}$

সমাধান: যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গ 4 অপেক্ষা বড় এবং ঘন 125 অপেক্ষা ছোট তাদের সেট।

আমরা জানি, $N = \{1,2,3,4,5,6, \dots\}$

$x = 1$ হলে, $x^2 = 1 \ngtr 4$ এবং $x^3 = 1 < 125$

$x = 2$ হলে, $x^2 = 4 = 4$ এবং $x^3 = 8 < 125$

$x = 3$ হলে, $x^2 = 9 > 4$ এবং $x^3 = 27 < 125$

$x = 4$ হলে, $x^2 = 16 > 4$ এবং $x^3 = 64 < 125$

$x = 5$ হলে, $x^2 = 25 > 4$ এবং $x^3 = 125 = 125$

$x = 6$ হলে, $x^2 = 36 > 4$ এবং $x^3 = 216 \nless 125$

যেখানে x এর মান 3 ও 4 এর জন্য প্রদত্ত শর্ত মানে।

$\therefore$ নির্ণেয় সেট $= \{3,4\}$

প্র্যাকটিস

1. $\{x \in N: x^2 > 15$ এবং $x^3 < 225\}$

2. $\{x \in Z: 25 \leq x^2 < 100\}$

3. $\{x \in N: x < 25$ এবং $x, 3$ এর গুনিতক$\}$

উত্তরমালা

1. $\{4, 5, 6\}$ **2.** $\{-9, -8, -7, -6, -5, 5, 6, 7, 8, 9\}$ **3.** $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$

Type 2: সেট গঠন পদ্ধতি

Model Ex 1: $C = \{-9, -6, -3, 3, 6, 9\}$ সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সমাধান: $C = \{-9, -6, -3, 3, 6, 9\}$

এখানে C সেটের প্রতিটি উপাদান অশূন্য এবং 3 দ্বারা বিভাজ্য অর্থাৎ 3 এর গুনিতক। উপাদানগুলো -9 থেকে বড় ও সমান এবং $+9$ এর চেয়ে ছোট ও সমান।

$\therefore C = \{x : x \neq 0, 3$ এর গুনিতক এবং $-9 \leq x \leq 9\}$

Model Ex 2: $C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সমাধান: $C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

এখানে C সেটের প্রতিটি উপাদান পূর্ণসংখ্যা। উপাদানগুলো -4 থেকে বড় ও সমান এবং 3 থেকে ছোট ও সমান।

$\therefore C = \{x \in Z : -4 \leq x \leq 3\}$

প্র্যাকটিস

1. $A = \{7, 14, 21, 28, 35, 42\}$ কে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

2. $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ কে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

3. $A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32\}$ কে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

উত্তরমালা

1. $A = \{x : x \neq 0, 7$ এর গুনিতক এবং $7 \leq x \leq 42\}$

2. $A = \{x : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $3 \leq x \leq 11\}$

3. $A = \{x : x \neq 0, 4$ এর গুনিতক এবং $4 \leq x \leq 32\}$

Type 3: বিভিন্ন প্রকার সেট ভিত্তিক

Model Ex 1: $\boldsymbol{U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}}$

$\boldsymbol{A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6, 8\}}$

$\boldsymbol{i.\ A \cup B} = ?$

$\boldsymbol{ii}.\ \boldsymbol{A \cap B} = ?$

$\boldsymbol{iii}.\ \boldsymbol{A - B} = ?$

$\boldsymbol{iv}.\ \boldsymbol{A'} = ?$

$\boldsymbol{v}.\ \boldsymbol{B'} = ?$

$\boldsymbol{vi}.\ (\boldsymbol{A \cup B})' = ?$

$\boldsymbol{vii}.\ \boldsymbol{A' \cap B'} = ?$

$\boldsymbol{viii}.\ (\boldsymbol{A \cap B})' = ?$

সমাধান:

$\boldsymbol{i}.\ A \cup B = \{1,2,3,4\} \cup \{2,4,6,8\}$

$= \{1,2,3,4,6,8\}$

$\boldsymbol{ii}.\ A \cap B = \{1,2,3,4\} \cap \{2,4,6,8\}$

$= \{2,4\}$

$\boldsymbol{iii}.\ A - B = \{1,2,3,4\} - \{2,4,6,8\}$

$= \{1,3\}$

$\boldsymbol{iv}.\ A' = U - A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} - \{1,2,3,4\}$

$= \{5,6,7,8\}$

$\boldsymbol{v}.\ B' = U - B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} - \{2,4,6,8\}$

$= \{1,3,5,7\}$

$\boldsymbol{vi}\ \ (A \cup B)' = U - (A \cup B)$

$= \{1,2,3,4,5,6,7,8\} - \{1,2,3,4,6,8\}$

$= \{5,7\}$

$\boldsymbol{vii}\ \ A' \cap B' = \{5,6,7,8\} \cap \{1,3,5,7\}$

$= \{5,7\}$

$\boldsymbol{viii}\ \ (A \cap B)' = U - (A \cap B)$

$= \{1,2,3,4,5,6,7,8\} - \{2,4\}$

$= \{1,3,5,6,7,8\}$

প্র্যাকটিস

1. যদি $A = \{1,2,4,8\}$ এবং $B = \{1,2,3,6\}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে,

$A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$

2. $P = \{1,2,3\}, \mathrm{Q} = \{2,4,6\}, \mathrm{R} = \{1,4,7\}$ হলে দেখাও যে,

$(P \cap Q) \cup R = P \cap (Q \cap R)$

Model Ex 2: $U = \{x: x < 10, x \in R\}$

$A = \{x: 1 < x \leq 4\}$, এবং $B = \{x: 3 \leq x < 6\}$ হলে,

$i.\ A \cap B = ?$

$ii.\ A' \cap B = ?$

$iii. A \cap B' = ?$

$iv.\ A' \cap B' = ?$

সমাধান:

$i. A \cap B = \{x: 1 < x \leq 4\} \cap \{x: 3 \leq x < 6\}$

$= \{x: 3 \leq x \leq 4\}$

$ii. A' = U - A = \{x: x < 10, x \in R\} - \{x: 1 < x \leq 4\}$

$= \{x: x \leq 1$ অথবা $4 < x < 10\}$

$\therefore A' \cap B = \{x: x \leq 1$ অথবা $4 < x < 10\} \cap \{x: 3 \leq x < 6\}$

$= \{x: 4 < x < 6\}$

$iii. B' = U - B = \{x: x < 10, x \in R\} - \{x: 3 \leq x < 6\}$

$= \{x: x < 3$ অথবা $6 \leq x \leq 10\}$

$\therefore A \cap B' = \{x: 1 < x \leq 4\} \cap \{x: x < 3$ অথবা $6 \leq x \leq 10\}$

$= \{x: 1 < x < 3\}$

$iv. A \cup B = \{x: 1 < x \leq 4\} \cup \{x: 3 \leq x < 6\}$

$= \{x: 1 < x < 6\}$

ডি মরগানের সূত্রানুসারে,

$A' \cap B' = (A \cup B)'$

$= U - (A \cup B)$

$= \{x: x < 10, x \in R\} - \{x: 1 < x < 6\}$

$= \{x: x \leq 1$ অথবা $6 \leq x < 10\}$

Type 4: শক্তি সেট (Power Set)

Model Ex 1: $A = \{a, b\}, B = \{a, b, c\}$ এবং $C = A \cup B$ হলে, দেখাও যে $P(C)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n, যেখানে n হচ্ছে C এর উপাদান সংখ্যা।

সমাধান:

দেওয়া আছে $A = \{a, b\}, B = \{a, b, c\}$

$\therefore C = A \cup B = \{a, b\} \cup \{a, b, c\}$

$= \{a, b, c\}$

$\therefore$ এখানে C এর উপাদান সংখ্যা $n = 3$

$\therefore P(C) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$

$\therefore P(C)$ এর উপাদান সংখ্যা $= 8 = 2^3 = 2^n$

প্র্যাকটিস

1. $A = \{1,2,3\}$ হলে $P(A)$ নির্ণয় কর এবং প্রকৃত উপসেট নির্ণয় কর।

কুইক টিপস

কোন সেটে n সংখ্যক উপাদান থাকলে তার প্রকৃত উপসেট সংখ্যা $2^n - 1$

Type 5: সেটের গুন (কার্তেসীয় গুণজ)

Model Ex 1: $A = \{0,1\}, B = \{1,2\}$ হলে $A \times B$ এবং $B \times A$ নির্ণয় কর।

সমাধান:

দেওয়া আছে, $A = \{0,1\},\ B = \{1,2\}$

কার্তেসীয় গুণজ নিয়মানুসারে,

$A \times B = \{0,1\} \times \{1,2\}$

$= \{(0,1), (0,2), (1,1), (1,2)\}$

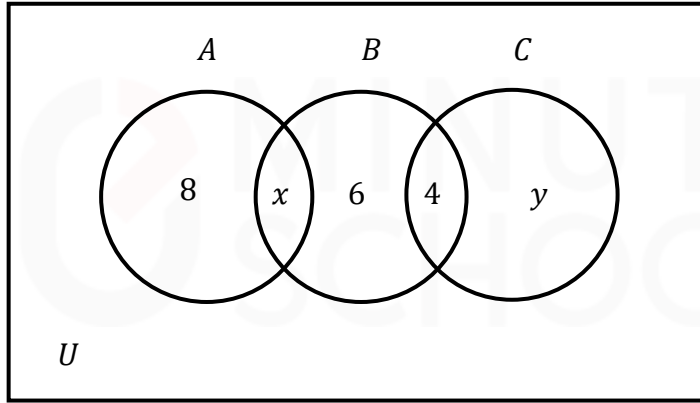
$B \times A = \{1,2\} \times \{0,1\}$

$= \{(1,0), (1,1), (2,0), (2,1)\}$

প্র্যাকটিস

1. $A = \{a, b\}, B = \{2,3\}, C = \{3,4\}$ হয় তবে $A \times (B \cup C)$ এবং $A \times (B \cap C)$ নির্ণয় কর

Type 6: ভেনচিত্র হতে

Model Ex 1: ভেনচিত্রে সার্বিক সেট U এবং উপসেট A, B, C এর সদস্য সংখ্যা উপস্থাপন করা হয়েছে।

(ক) যদি $n(A \cap B) = n(B \cap C)$ হয় তবে x এর মান নির্ণয় কর।

(খ) যদি $n(B \cap C') = n(A' \cap C)$ হয় তবে y এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $n(U)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

(ক) যদি $n(A \cap B) = n(B \cap C)$ হয় তবে x এর মান নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $n(A \cap B) = n(B \cap C)$

$\Rightarrow x = 4$ [ভেনচিত্র হতে]

$\therefore x = 4$

(ক) যদি $n(A \cap B) = n(B \cap C)$ হয় তবে x এর মান নির্ণয় কর।

(খ) যদি $n(B \cap C') = n(A' \cap C)$ হয় তবে y এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $n(U)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

(ক) যদি $\boldsymbol{n(A \cap B) = n(B \cap C)}$ হয় তবে $\boldsymbol{x}$ এর মান নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $n(A \cap B) = n(B \cap C)$

$\Rightarrow x = 4$ [ভেনচিত্র হতে]

$\therefore x = 4$

(খ) যদি $\boldsymbol{n(B \cap C') = n(A' \cap C)}$ হয় তবে $\boldsymbol{y}$ এর মান নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $n(B \cap C') = n(A' \cap C)$

$\Rightarrow x + 6 = 4 + y$ [ভেনচিত্র হতে]

$\Rightarrow 4 + 6 - 4 = y$

$\therefore y = 6$

(গ) $\boldsymbol{n(U)}$ এর মান নির্ণয় কর।

$n(U) = 8 + x + 6 + 4 + y$ [ভেনচিত্র হতে]

$= 8 + x + 6 + 4 + 6 \quad \left[\because \begin{matrix} x = 4 \\ y = 6 \end{matrix}\right]$

$= 8 + x + 6 + 4 + 6$

$= 28$

$\therefore n(U) = 28$

Type 7: উচ্চতর দক্ষতামূলক

Model Ex 1: 10 minute school এর অনলাইন কোর্সে 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে পদার্থবিজ্ঞান নিয়েছে 42 জন, 30 জন গণিত ও 28 জন রসায়ন নিয়েছে। 10 জন পদার্থ ও রসায়ন নিয়েছে, 8 জন নিয়েছে গণিত ও রসায়ন,5 জন নিয়েছে গণিত ও পদার্থ, 3 জন সবগুলো নিয়েছে।

(ক) কতজন শিক্ষার্থী তিনটি কোর্সের একটিও নেয়নি?

(খ) কতজন শিক্ষার্থী তিনটি কোর্সের কেবল একটি কোর্স নিয়েছে?

(গ) কতজন শিক্ষার্থী তিনটি কোর্সের কেবল দুইটি কোর্স নিয়েছে?

সমাধান:

(ক) কতজন শিক্ষার্থী তিনটি কোর্সের একটিও নেয়নি?

সৃজনশীল প্রশ্ন নং: ১ (ক) এর উত্তর দেখুন

(খ) কতজন শিক্ষার্থী তিনটি কোর্সের কেবল একটি কোর্স নিয়েছে?

মনেকরি,

সকল শিক্ষার্থীর সেট= U

পদার্থবিজ্ঞান নেয়া শিক্ষার্থীর সেট= P

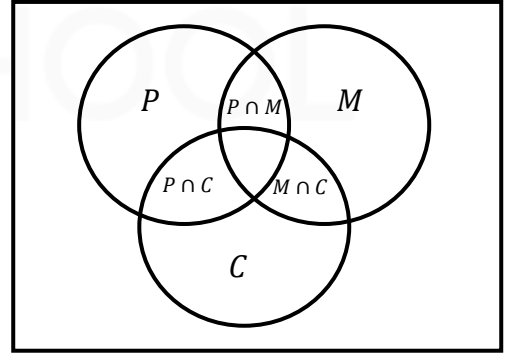
গণিত নেয়া শিক্ষার্থীর সেট= M

রসায়ন নেয়া শিক্ষার্থীর সেট= C

তাহলে,

$n(U) = 100,\quad n(P) = 42,\quad n(M) = 30$

$n(C) = 28,\quad n(P \cap C) = 10,\quad n(M \cap C) = 8$

$n(M \cap P) = 5\quad$ এবং $n(P \cap M \cap C) = 3.$

i) অন্তত একটি কোর্স নিয়েছে এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা= $n(P \cup M \cup C)$

∴ একটি কোর্স ও নেয়নি এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা $= n(U) - n(P \cup M \cup C)$

$n(P \cup M \cup C) = n(P) + n(M) + n(C) - n(M \cap P) - n(M \cap C) - n(P \cap C) + n(P \cap M \cap C)$

$= 42 + 30 + 28 - 5 - 8 - 10 + 3 = 80$

$\therefore$ একটি কোর্স ও নেয়নি এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা $= 100 - 80 = 20$

ii) অন্তত দুইটি কোর্স নিয়েছে এমন শিক্ষার্থীর সেট,

$= (M \cap P) \cup (M \cap C) \cup (P \cap C)$ [ভেনচিত্র হতে]

অন্তত একটি কোর্স নিয়েছে এমন শিক্ষার্থীর সেট $= (P \cup M \cup C)$

$\therefore$ কেবল দুইটি কোর্স নিয়েছে এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা

$= n(P \cup M \cup C) - n[(M \cap P) \cup (M \cap C) \cup (P \cap C)]$

এখন,

$n[(M \cap P) \cup (M \cap C) \cup (P \cap C)]$

$= n(M \cap P) + n(M \cap C) + n(P \cap C) - n[(M \cap P) \cap (M \cap C)] - n[(M \cap C) \cap (P \cap C)] - n[(P \cap C) \cap (P \cap M)] + n[(M \cap P) \cap (M \cap C) \cap (P \cap C)]$

$= n(P \cap M) + n(M \cap C) + n(P \cap C) - n(P \cap M \cap C) - n(P \cap M \cap C) - n(P \cap M \cap C) + n(P \cap M \cap C)$

$= 5 + 8 + 10 - 3 - 3 - 3 + 3 = 17$

$\therefore$ কেবল একটি কোর্স নিয়েছে $= n(P \cup M \cup C) - 17$

$= 80 - 17$ [i নং হতে]

$= 63$ জন

(গ) কতজন শিক্ষার্থী তিনটি কোর্সের কেবল দুইটি কোর্স নিয়েছে?

শুধু পদার্থ ও রসায়ন নিয়েছে $= n(P \cap C) - n(P \cap M \cap C)$

$= 10 - 3 = 7$ জন

শুধু পদার্থ ও গণিত নিয়েছে $= n(P \cap M) - n(P \cap M \cap C)$

$= 5 - 3 = 2$ জন

শুধু গণিত ও রসায়ন নিয়েছে $= n(M \cap C) - n(P \cap M \cap C)$

$= 8 - 3 = 5$ জন

$\therefore$ কেবল দুইটি কোর্স নিয়েছে $= 7 + 2 + 5 = 14$ জন

প্র্যাকটিস

1. কোন স্কুলের দশম শ্রেনীর বিজ্ঞান শাখার 50 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 29 জন জীববিজ্ঞান, 24 জন কৃষিশিক্ষা এবং 11 জন জীববিজ্ঞান অ কৃষিশিক্ষা উপ্য বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী বিষয় দুটির কোনটিই নেয়নি?

উত্তরমালা

1. 10 জন

Type 8: ফাংশনের মান নির্ণয়

Model Ex 1: $f(x) = (x-1)^2$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য

i. $f(-5), f(-1), f(0)$ নির্ণয় কর।

ii. $f(x) = 100$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

i) দেওয়া আছে $f(x) = (x-1)^2$

$\therefore f(-5) = (-5-1)^2 = 36$

$\therefore f(-1) = (-1-1)^2 = 4$

$\therefore f(0) = (0-1)^2 = 1$

ii) দেওয়া আছে $f(x) = (x-1)^2$

$\therefore 100 = (x-1)^2$

$\Rightarrow (x-1)^2 = 100$

$\Rightarrow (x-1) = \pm 10$

$(+)$ নিয়ে পাই,

$x - 1 = 10$

$\Rightarrow x = 11$

$(-)$ নিয়ে পাই,

$x - 1 = -10$

$\Rightarrow x = -9$

$\therefore x = -9, 11$

Type 9: ফাংশনের ডোমেন নির্ণয়

Model Ex 1: $f(x) = \sqrt{1-x}$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর।

সমাধান:

$f(x) = \sqrt{1-x} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $1 - x \geq 0$ বা $x \leq 1$ হয়।

$\therefore$ ডোম $f = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 1\}$

$= (-\infty, 1]$

Model Ex 2: $f(x) = \frac{1}{x-2}$ দ্বারা বর্নিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর।

সমাধান:

$f(x) = \frac{1}{x-2} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x - 2 \neq 0$ বা $x \neq 2$ হয়।

$\therefore$ ডোম $f = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 2\}$

$= \mathbb{R} - \{2\}$

প্র্যাকটিস

1. $f(x) = \sqrt{x-2}$ দ্বারা বর্নিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর।
2. $f(x) = \sqrt{4-3x}$ দ্বারা বর্নিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর।
3. $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ দ্বারা বর্নিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর।

Type 10: এক এক ফাংশন নির্ণয়

Model Ex 1: $f(x) = \frac{2x-1}{2x+3}$ ফাংশনটি এক এক কিনা যাচাই কর।

সমাধান:

$f(x) = \frac{2x-1}{2x+3}$

$f(x) \in R$ হবে যদি এবং কেবল যদি $2x + 3 \neq 0$ হয় বা $x \neq -\frac{3}{2}$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন $f = \{x \in R: x \neq -\frac{3}{2}\}$

$= R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

এক এক যাচাই:

ধরি, $x_1 \in$ ডোম f এবং $x_2 \in$ ডোম f

$f(x_1) = \frac{2x_1-1}{2x_1+3}, f(x_2) = \frac{2x_2-1}{2x_2+3}$

$f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি,

$\frac{2x_1-1}{2x_1+3} = \frac{2x_2-1}{2x_2+3}$ হয়

$\Rightarrow \frac{2x_1-1}{2x_1+3} - 1 = \frac{2x_2-1}{2x_2+3} - 1$

$\Rightarrow \frac{2x_1-1-2x_1-3}{2x_1+3} = \frac{2x_2-1-2x_2-3}{2x_2+3}$

$\Rightarrow \frac{-4}{2x_1+3} = \frac{-4}{2x_2+3}$

$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ ফাংশনটি এক এক।

Type 11: সার্বিক ফাংশন নির্ণয়

Model Ex 1: $g(x) = \frac{x-5}{3x+1}$ ফাংশনটি সার্বিক কিনা যাচাই কর।

ধরি, $y = g(x) = \frac{x-5}{3x+1}$

এখন, $y = \frac{x-5}{3x+1}$

$\Rightarrow 3xy + y = x - 5$

$\Rightarrow 3xy - x = -y - 5$

$\Rightarrow x(3y-1) = -y - 5$

$\Rightarrow x = \frac{-y-5}{3y-1} = \frac{-(y+5)}{-(1-3y)}$

$\Rightarrow x = \frac{y+5}{1-3y}$

$\therefore g\left(\frac{y+5}{1-3y}\right) = \frac{\left(\frac{y+5}{1-3y}\right)-5}{3\left(\frac{y+5}{1-3y}\right)+1}$

$= \frac{\frac{y+5-5+15y}{1-3y}}{\frac{3y+15+1-3y}{1-3y}}$

$= \frac{16y}{1-3y} \times \frac{1-3y}{16}$

$\therefore g\left(\frac{y+5}{1-3y}\right) = y$

$\therefore$ ফাংশনটি সার্বিক।

Type 12: বিপরীত ফাংশন নির্ণয়

Model Ex 1: $g(x) = \frac{x-5}{3x+1}$ হলে $g^{-1}(x)$ নির্ণয় কর?

সমাধান:

ধরি, $y = g(x) = \frac{x-5}{3x+1}$

এখন, $y = g(x)$

$\therefore x = g^{-1}(y)$

আবার, $y = \frac{x-5}{3x+1}$

$\Rightarrow 3xy + y = x - 5$

$\Rightarrow 3xy - x = -y - 5$

$\Rightarrow x(3y - 1) = -y - 5$

$\Rightarrow x = \frac{-y-5}{3y-1}$

$\Rightarrow x = \frac{-(y+5)}{-(1-3y)}$

$\Rightarrow x = \frac{y+5}{1-3y}$

$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x+5}{1-3x}$

কুইক টিপস

একটি ফাংশন এক এক ও সার্বিক হলে বিপরীত ফাংশন নির্ণয়যোগ্য।

Type 13: ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয়

কুইক টিপস

বিপরীত ফাংশনের ডোমেন হচ্ছে মূল ফাংশনের রেঞ্জ।

Model Ex 1: $\boldsymbol{f(x) = \frac{x+2}{5x-1}}$ এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান:

ধরি, $y = f(x) = \frac{x+2}{5x-1}$

$y = f(x)$

$\therefore x = f^{-1}(y)$

আবার, $y = \frac{x+2}{5x-1}$

$\Rightarrow 5xy - y = x + 2$

$\Rightarrow 5xy - x = y + 2$

$\Rightarrow x(5y - 1) = y + 2$

$\Rightarrow x = \frac{y+2}{5y-1}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+2}{5y-1}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{5x-1}$

$f^{-1}(x) \in R$ হবে যদি ও কেবল যদি $5x - 1 \neq 0$ বা $x \neq \frac{1}{5}$ হয়।

$\therefore$ ডোম $f^{-1} = \left\{x \in \mathrm{R}: x \neq \frac{1}{5}\right\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{5}\right\}$

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{5}\right\}$

কুইক টিপস

কোন ফাংশনের কো-ডোমেন=রেঞ্জ হলে ফাংশনটি সার্বিক।

Type 14: অন্বয় হতে সবকিছু নির্ণয়

Model Ex 1: $\boldsymbol{S=\{\left(\frac{1}{2},0\right),(1,1),(1,-1),\left(\frac{5}{2},2\right),(\frac{5}{2},-2)\}}$

i. প্রদত্ত S অন্বয়ের ডোমেন,রেঞ্জ,বিপরীত অন্বয় নির্ণয় কর।

ii. S অথবা S^{-1} ফাংশন কিনা যাচাই কর।

iii. ফাংশন হলে তা এক এক কিনা যাচাই কর।

সমাধান:

i) এখানে $S=\{\left(\frac{1}{2},0\right),(1,1),(1,-1),\left(\frac{5}{2},2\right),(\frac{5}{2},-2)\}$

$\therefore$ ডোম $S=\{\frac{1}{2},1,\frac{5}{2}\}$

$\therefore$ রেঞ্জ $S=\{-2,-1,0,1,2\}$

$S^{-1}=\{\left(0,\frac{1}{2}\right),(1,1),(-1,1),\left(2,\frac{5}{2}\right),\left(-2,\frac{5}{2}\right)\}$

ii) S এর একই উপাদান(ডোমেন) এর জন্য একাধিক ক্রমজোড় আছে।

যেমন: $(1,1)$ এবং $(1,-1)$

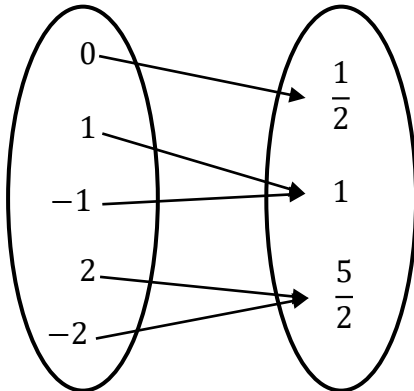
$\therefore$ S একটি ফাংশন নয়।

S^{-1} এর একই উপাদান এর জন্য একাধিক ক্রমজোড় নেই।

$\therefore$ S^{-1} একটি ফাংশন।

iii) $S=\{\left(\frac{1}{2},0\right),(1,1),(1,-1),\left(\frac{5}{2},2\right),(\frac{5}{2},-2)\}$

যেহেতু S ফাংশন নয় তাই S এক এক ফাংশন নয়।

$S^{-1}=\{\left(0,\frac{1}{2}\right),(1,1),(-1,1),\left(2,\frac{5}{2}\right),\left(-2,\frac{5}{2}\right)\}$

S^{-1} ফাংশনের অধীনে ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিচ্ছবি ভিন্ন নয়।

$\therefore S^{-1}$ এক এক ফাংশন নয়।

সৃজনশীল (CQ)

১। $A = \{x : x \in \mathbb{Z}$ এবং $x^2 \leq 4\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $x < 5\}$

$C = \{3, 5\}$ **[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৯]**

(ক) C সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

(খ) দেখাও যে, $P(B) \cup P(C) \subset P(B \cup C)$

(গ) $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = \sqrt{4 - x^2}\}$ অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করে ডোম S নির্ণয় কর।

সমাধান:

(ক) দেওয়া আছে,

$$C = \{3, 5\}$$

প্রদত্ত C সেটটি মৌলিক সংখ্যার সেট যা 2 থেকে বড় এবং 7 থেকে ছোট।

$C = \{x : x,$ মৌলিক সংখ্যা এবং $2 < x < 7\}.$

বিকল্প পদ্ধতি

দেওয়া আছে,

$$C = \{3, 5\}$$

প্রদত্ত C সেটটি বিজোড় সংখ্যার সেট যা 1 থেকে বড় এবং 7 থেকে ছোট।

$C = \{x : x,$ বিজোড় সংখ্যা এবং $1 < x < 7\}.$

(খ) দেওয়া আছে,

$\mathrm{B} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{N} : x$ বিজোড় সংখা এবং $x < 5\}$

$= \{1, 3\}$

এবং $C = \{3, 5\}$

$\therefore \quad P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$

$P(C) = \{\emptyset, \{3\}, \{5\}, \{3, 5\}\}$

$\therefore \quad \mathrm{P(B)} \cup P(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\} \cup \{\emptyset, \{3\}, \{5\}, \{3, 5\}\}$

$= \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{3, 5\}\}$

আবার, $\mathrm{B} \cup C = \{1, 3\} \cup \{3, 5\} = \{1, 3, 5\}$

$\therefore \ \mathrm{P}(B \cup C) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$

সুতরাং, $P(B) \cup P(C) \subset P(B \cup C)$.

(গ) দেওয়া আছে,

$$\mathrm{A} = \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ এবং } x^2 \leq 4\}$$

এখানে,

$\mathrm{x} = 0$ হলে, $x^2 = (0)^2 = 0 < 4$

$\mathrm{x} = \pm 1$ হলে, $x^2 = (\pm 1)^2 = 1 < 4$

$\mathrm{x} = \pm 2$ হলে, $x^2 = (\pm 2)^2 = 4 < 4$

$\mathrm{x} = \pm 3$ হলে, $x^2 = (\pm 3)^2 = 9 > 4$

$\therefore \quad \mathrm{A} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

এবং $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = \sqrt{4 - x^2}\}$

S অন্বয়ে বর্ণিত শর্ত থেকে পাই, $y = \sqrt{4 - x^2}$

এখন,

প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $y = \sqrt{4 - x^2}$ এর মান নির্ণয় করি:

x	-2	-1	0	1	2
y	0	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	0

যেহেতু $\sqrt{3} \notin A$

$\therefore \quad \{-1, \ \sqrt{3}\} \notin S$

এবং $\{1, \sqrt{3}\} \notin S$

$\therefore \quad S = \{(-2,0),(0,2),(2,0)\}$

$\therefore$ ডোম $S = \{-2,0,2\}$.

২। ১০ম শ্রেণির 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে চালানো একটি জরিপে দেখা গেল যে, 57 জন গোলাপ, 49 জন বেলি ও 37 জন শিক্ষার্থী হাসনাহেনা ফুল পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 27 জন গোলাপ ও বেলি, 23 জন বেলি ও হাসনাহেনা এবং 29 জন হাসনাহেনা ও গোলাপ ফুল পছন্দ করে। 17 জন শিক্ষার্থী তিনটি ফুলই পছন্দ করে। **[বরিশাল বোর্ড ২০১৯]**

(ক) সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ তথ্যসমূহকে ভেনচিত্রে দেখাও।

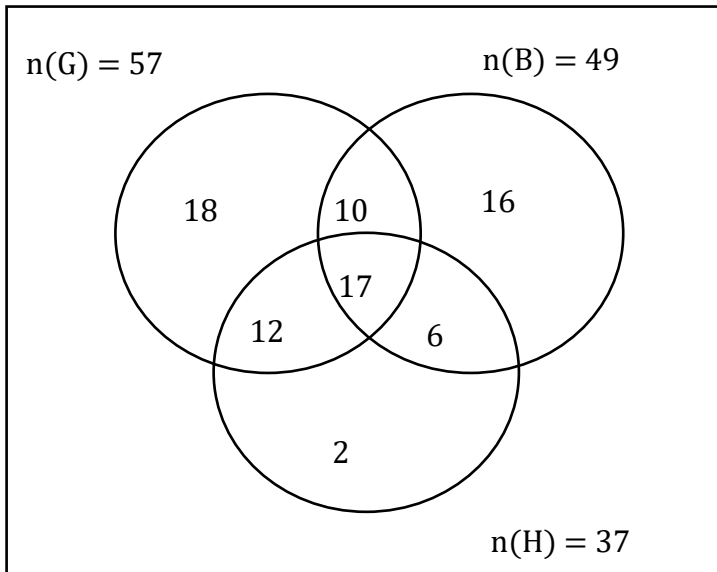
(খ) কতজন শিক্ষার্থী ফুল তিনটির কোনোটিই পছন্দ করে না? নির্ণয় কর।

(গ) কতজন শিক্ষার্থীর ফুল তিনটির কেবল একটি ফুল পছন্দ করে – নির্ণয় কর।

সমাধান:

(ক) মনেকরি,

সকল শিক্ষার্থীদের সেট S। এদের মধ্যে যেসব শিক্ষার্থী গোলাপ, বেলি ও হাসনাহেনা ফুল পছন্দ করে তাদের সেট যথাক্রমে G, B, H। তথ্যগুলো পাশের ভেনচিত্রে দেখানো হলো:

$C = \{x : x,$ মৌলিক সংখ্যা এবং $2 < x < 7\}$.

(খ) 'ক' এর ভেনচিত্র হতে পাই,

$n(G) = 57$

$n(B) = 49$

$n(H) = 37$

$n(G \cap B) = 27$

$n(B \cap H) = 23$

$n(H \cap G) = 29$

$n(G \cap B \cap H) = 17$

মনে করি,

তিনটি ফুলের মধ্যে অন্তত একটি পছন্দ করে এমন শিক্ষার্থী সংখ্যা $n(G \cup B \cup H)$.

আমরা জানি,

$n(G \cup B \cup H) = n(G) + n(B) + n(H) - n(G \cap B) - n(B \cap H) - n(H \cap G) + n(G \cap B \cap H)$

$= 57 + 49 + 37 - 27 - 23 - 29 + 17$

$= 81$

তিনটি ফুলের মধ্যে কোনোটিই পছন্দ করে না এমন শিক্ষার্থী সংখ্যা,

$n(G \cup B \cup H)' = n(S) - n(G \cup B \cup H)$

$= 100 - 81$

$= 19$

$\therefore$ 19 জন শিক্ষার্থী তিনটি ফুলের কোনোটিই পছন্দ করে না।

(গ) কেবল গোলাপ পছন্দ করে

$= n(G) - n(G \cap B) - n(H \cap G) + n(G \cap B \cap H)$

$= (57 - 27 - 29 + 17)$ জন

$= 18$ জন

কেবল বেলি পছন্দ করে

$= n(B) - n(G \cap B) - n(B \cap H) + n(G \cap B \cap H)$

$= (49 - 27 - 23 + 17)$ জন

$=16$ জন

কেবল হাসনাহেনা পছন্দ করে

$= n(H) - n(B \cap H) - n(H \cap G) + n(G \cap B \cap H)$

$= (37 - 23 - 29 + 17)$ জন

$= 2$ জন

$\therefore$ তিনটি ফুলের কেবল একটি ফুল পছন্দ করা শিক্ষার্থীর সংখ্যা

$= (18 + 16 + 2)$ জন

$= 36$ জন

$\therefore$ 36 জন শিক্ষার্থী ফুল তিনটির কেবল একটি ফুল পছন্দ করে।

৩। $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এবং $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনদ্বয় $f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$ এবং $g(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

[ঢাকা বোর্ড ২০১৭]

(ক) f এর ডোমেন নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, g ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন।

(গ) $3f^{-1}(x) = x$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

(ক) দেওয়া আছে,

$f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$

x এর যে সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায়, সেগুলোই $f(x)$ এর ডোমেন।

$f(x) = \frac{2}{x-3} \in \mathbb{R}$ হবে

যদি ও কেবল যদি $x - 1 \neq 0$ বা $x \neq 1$ হয়।

$f(x)$ এর ডোমেন $= \mathbb{R} - \{1\}$.

বিকল্প পদ্ধতি

দেওয়া আছে,

$f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$

$f(x)$ ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি

$x - 1 \neq 0$

বা, $x \neq 1$ হয়।

অর্থাৎ, $x = 1$ হলে $f(x)$ অসংজ্ঞায়িত হবে

$\therefore$ ডোমেন = $\mathbb{R} - \{1\}$.

(খ) দেওয়া আছে,

$g(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

$g(x) \in R$ হবে

যদি ও কেবল যদি $2x + 1 \neq 0$ বা, $x \neq -\frac{1}{2}$ হয়।

$\therefore$ g এর ডোমেন $= R - \{-\frac{1}{2}\}$

ধরি,

$a, b \in$ ডোম $g(x)$

$\therefore$ $g(a) = \frac{a-3}{2a+1}$ এবং $g(b) = \frac{b-3}{2b+1}$

$g(x)$ এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি যেকোনো $a, b \in$ ডোম g এর জন্য $g(\mathrm{a}) = \mathrm{g(b)}$ হলে $a = b$ হয়।

যদি $g(a) = g(b)$ হয়, তবে $\frac{a-3}{2a+1} = \frac{b-3}{2b+1}$

বা, $2ab + a - 6b - 3 = 2ab + b - 6a - 3$

বা, $2ab + a - 6b - 3 - 2ab - b + 6a + 3 = 0$

বা, $7a - 7b = 0$

বা, $7(a - b) = 0$

বা, $a - b = 0$

$\therefore$ $a = b$

সুতরাং $g(x)$ একটি এক-এক ফাংশন।

ধরি,

$y = g(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

বা, $2xy + y = x - 3$

বা, $2xy - x = -y - 3$

বা, $x(2y - 1) = -y - 3$

বা, $x = \frac{-y-3}{(2y-1)} = \frac{y+3}{1-2y}$

$\therefore \quad x = \frac{y+3}{1-2y}$

এখন,

$x = \frac{y+3}{1-2y} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $1 - 2y \neq 0$

বা, $y \neq \frac{1}{2}$ হয়।

$\therefore$ $g(x)$ এর রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} =$ কোডোমেন

সুতরাং, $g(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

অতএব, $g(x)$ একটি এক-এক এবং সার্বিক। **(দেখানো হলো)**

কুইক টিপস

$\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ শর্তে $g(x)$ ফাংশনটি সঙ্গায়িত এবং এক-এক ও সার্বিক

(গ) দেওয়া আছে,

$f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$

ধরি,

$y = f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$

তাহলে, $f(x) = y$

বা, $f^{-1}\{f(x)\} = f^{-1}(y)$

বা, $x = f^{-1}(y)$

আবার, $y = \frac{2x+2}{x-1}$

বা, $xy - y = 2x + 2$

বা, $xy - 2x = y + 2$

বা, $x(y - 2) = y + 2$

বা, $x = \frac{y+2}{y-2}$

বা, $f^{-1}(y) = \frac{y+2}{y-2}$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2}$

প্রশ্নমতে,

$3f^{-1}(x) = x$

বা, $3 \times \left(\frac{x+2}{x-2}\right) = x$

বা, $\frac{3x+6}{x-2} = x$

বা, $x^2 - 2x = 3x + 6$

বা, $x^2 - 2x - 3x - 6 = 0$

বা, $x^2 - 5x - 6 = 0$

বা, $x^2 - 6x + x - 6 = 0$

বা, $x(x - 6) + 1(x - 6) = 0$

বা, $(x - 6)(x + 1) = 0$

হয়, $x + 1 = 0$

বা, $x = -1$

অথবা, $x - 6 = 0$

বা, $x = 6$

নির্ণেয় x এর মান $-1,6$

৪। $\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{x-3}}$ **[রাজশাহী বোর্ড ২০১৭]**

(ক) $\boldsymbol{f(x)}$ **এর ডোমেন নির্ণয় কর।**

(খ) $\boldsymbol{f^{-1}(5)}$ **নির্ণয় কর।**

(গ) প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান:

(ক) দেওয়া আছে,

$f(x) = \frac{2}{x-3}$

$f(x) = \frac{2}{x-3} \in \mathbb{R}$ হবে

যদি ও কেবল যদি $x - 3 \neq 0$

বা $x \neq 3$ হয়।

$f(x)$ এর ডোমেন $= \mathbb{R} - \{3\}$.

(খ) $\boldsymbol{f^{-1}(5)}$ **নির্ণয় কর।**

দেওয়া আছে,

$f(x) = \frac{2}{x-3}$

ধরি,

$y = f(x) = \frac{2}{x-3}$

তাহলে,

$f(x) = y$

বা, $f^{-1}\{f(x)\} = f^{-1}(y)$

বা, $x = f^{-1}(y)$

আবার,

$y = \frac{2}{x-3}$

বা, $xy - 3y = 2$

বা, $xy = 3y + 2$

বা, $x = \frac{3y+2}{y}$

বা, $f^{-1}(y) = \frac{3y+2}{y}$

বা, $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{x}$

বা, $f^{-1}(5) = \frac{3\times5+2}{5} = \frac{15+2}{5} = \frac{17}{5}$

নির্ণেয়, $f^{-1}(5) = \frac{17}{5}$

(গ) দেওয়া আছে,

$$f(x) = \frac{2}{x-3}$$

ধরি,

$y = f(x) = \frac{2}{x-3}$

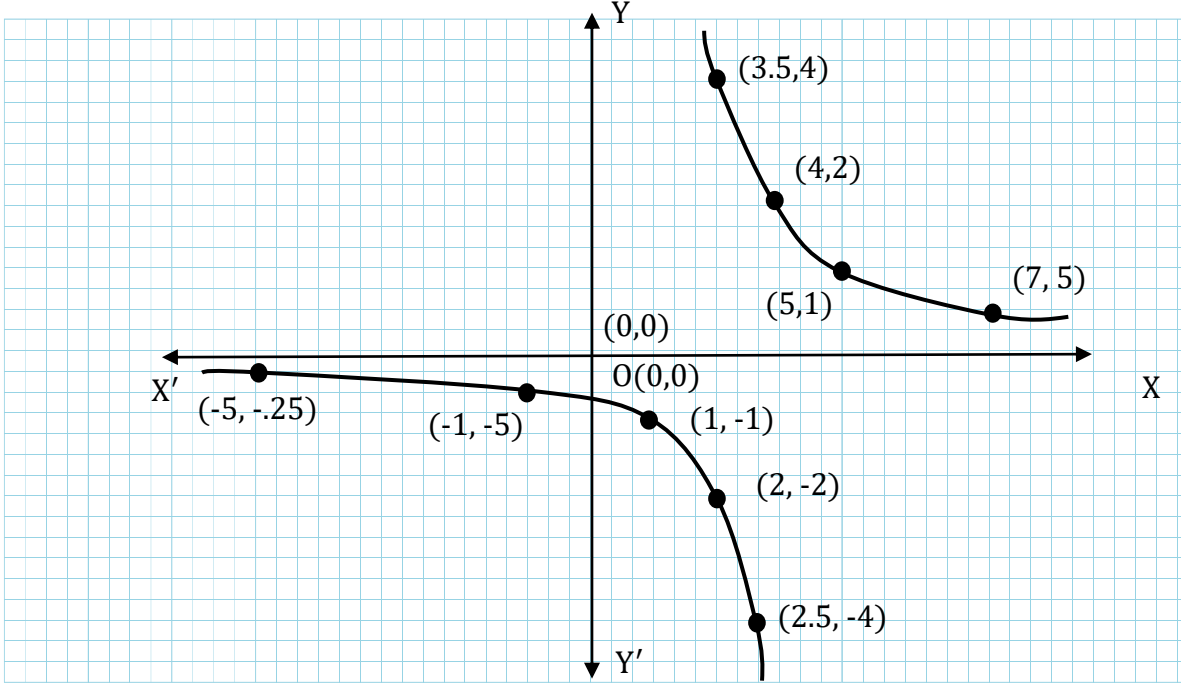
x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর সংশ্লিষ্ট মানসমূহ নিম্নরূপ:

x	-5	-1	1	2	2.5	3.5	4	5	7
$y = f(x)$	$-.25$	$-.5$	-1	-2	-4	4	2	1	$.5$

এখানে উলেখ্য যে,

$x = 3$ এর জন্য ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন।

এখন,

ছক কাগজের x ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 4 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে বিন্দুগুলি স্থাপন করে যোগ করে লেখচিত্রটি অঙ্কন করি:

বহুনির্বাচনী (MCQ)

০১. কোন সেটের সদস্য সংখ্যা হলে প্রকৃত উপসেট সংখ্যা কত? [র. বো. ২০১৬]

(ক) $2^n + 2$ (খ) 2^{n+2} (গ) $2^n - 1$ (ঘ) $2^n - 2$ উত্তর: গ

ব্যাখ্যা: কোনো সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে তার উপসেটের সংখ্যা 2^n। কিন্তু সেটটি নিজে নিজের প্রকৃত উপসেট নয়; তাই প্রকৃত উপসেট সংখ্যা $2^n - 1$।

কুইক টিপস

ফাকা সেট {} বা $\emptyset$ যে কোনো সেটের প্রকৃত উপসেট।

উদাহরণ

$A = \{1,2,3,4\}$ হলে এর প্রকৃত উপসেট সংখ্যা নির্ণয়-

সেটের সদস্য সংখ্যা 4 টি। সুতরাং, উপসেট সংখ্যা $= 2^4 = 16$ যাতে A সেট নিজেও অন্তর্ভুক্ত। কিন্তু A সেট নিজেই নিজের প্রকৃত উপসেট নয়। সুতরাং, প্রকৃত উপসেট সংখ্যা $= 2^4 - 1$

০২. প্রকৃত উপসেট এর চিহ্ন কোনটি?

(ক) $\subset$ (খ) $\nsubseteq$ (গ) $\subseteq$ (ঘ) $\not\subset$ উত্তর: ক

ব্যাখ্যা: প্রকৃত উপসেট বলতে $\subset$ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।

চিহ্ন	যা প্রকাশ করে
$\subseteq$	উপসেট (প্রকৃত উপসেট হতে পারে আবার নাও হতে পারে)
$\subset$	প্রকৃত উপসেট
$\not\subset$	প্রকৃত উপসেট নয়
$\nsubseteq$	উপসেট নয়

০৩. P,Q এর প্রকৃত উপসেট নয় বোঝাতে কোনটি ব্যবহৃত হয়?

(ক) $P \not\subset Q$ (খ) $P \subseteq Q$ (গ) $P \subset Q$ (ঘ) $P \nsubseteq Q$ উত্তর: ঘ

ব্যাখ্যা: পূর্বের প্রশ্নের ব্যাখ্যা দেখুন।

০৪. $P = \{1,2,3\}$, $Q = \{1,2,3,4\}$ হলে নিচের কোন সম্পর্কটি অধিক যুক্তিযুক্ত?

(ক) $P \not\subset Q$ (খ) $P \subseteq Q$ (গ) $P \subset Q$ (ঘ) $P \nsubseteq Q$ উত্তর: গ

ব্যাখ্যা: P সেটের সকল উপাদান অর্থাৎ $\{1,2,3\}, Q$ সেটে বিদ্যমান, কিন্তু Q সেটের একটি উপাদান 4,P সেটে নেই। P এর প্রতিটি উপাদান এর সদস্য। তাই $P \subseteq Q$ এবং $P \subset Q$ উভয় সম্পর্কই সত্য। কিন্তু $P \neq Q$ হওয়ায়, P,Q এর প্রকৃত উপসেট।

সুতরাং, $P \subset Q$ অধিক যুক্তিযুক্ত।

০৫. A সেটটির উপাদান সংখ্যা 3 হলে তার প্রকৃত সংখ্যা কত?

(ক) 8 (খ) 6 (গ) 7 (ঘ) 9 উত্তর: গ

ব্যাখ্যা: যেহেতু কোন সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে তার উপসেটের সংখ্যা হলে তার উপসেটের সংখ্যা হবে 2^n। এর মধ্যে একটি ঐ সেটটির অনুরূপ যা উপসেট হলেও প্রকৃত উপসেট নয়। সুতরাং প্রকৃত উপসেট হবে $(2^n - 1)$ টি।

সেটের প্রকৃত উপসেট সংখ্যা $= (2^3 - 1)$ টি $= 7$ টি

০৬. A={a, b, c, d} হলে, P(A) এর উপাদান সংখ্যা কত?

(ক) 4 (খ) 8 (গ) 16 (ঘ) 32 উত্তর: গ

ব্যাখ্যা: কোনো সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে তার শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা হবে 2^n ।

$\therefore A$ এর উপাদান সংখ্যা,n = 4

সুতরাং, P(A) এর উপাদান সংখ্যা = $2^4 = 16$

০৭. A = {1, 2, 3, 4, 5} সেটের শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা কয়টি?

(ক) 5 (খ) 10 (গ) 25 (ঘ) 32 উত্তর: ঘ

ব্যাখ্যা: কোনো সেটের ক্ষেত্রে,

উপাদান সংখ্যা n হলে, শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা 2^n

উপাদান সংখ্যা 5 হলে, শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা = $2^5 = 32$

সুতরাং, P(A) এর উপাদান সংখ্যা 32।

০৮. A = {a, b, c, d, e} হলে, P(A) এর উপাদান সংখ্যা কত?

(ক) 5 (খ) 10 (গ) 25 (ঘ) 32 উত্তর: ঘ

ব্যাখ্যা: দেওয়া আছে, A ={a, b, c, d, e}

অর্থাৎ A সেটের উপাদান সংখ্যা = 5

কাজেই A সেটের শক্তি সেট P(A) এর উপাদান সংখ্যা 32।

০৯. U = {1, 3, 5, 6}, A = {3, 6} হলে P(A’) এর উপাদান সংখ্যা কয়টি?

(ক) 1 (খ) 2 (গ) 4 (ঘ) 8 উত্তর: গ

ব্যাখ্যা: এখানে, U = {1, 3, 5, 6}, A = {3,6}

$\therefore A' =$ U-A = {1,5}

$\therefore P(A') = \{\{1\},\{5\},\{1,5\},\Phi\} = 4$ টি

১০. $B = \{x \epsilon N : 6 < 2x < 17\}$ হলে, P(B) এর উপাদান সংখ্যা নিচের কোনটি? [রা.বো. ’১৬]

(ক) 2^3 (খ) 2^4 (গ) 2^5 (ঘ) $2^4 + 1$ উত্তর: গ

ব্যাখ্যা: প্রদত্ত সেট, B = $\{x \epsilon N : 6 < 2x, 17\}$

N = স্বাভাবিক সংখ্যার সেট = (1,2,3,............)

এখন, 6<2x<17

বা, $\frac{6}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{17}{2}$ [ব্যবধির সকল পক্ষে 2 দ্বারা ভাগ করে পাই]

বা, 3<x<8.5

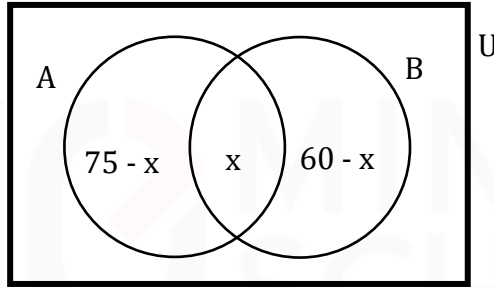
$\because x \epsilon N$ এবং 3<x<8.5

∴ সেট B = {4, 5, 6, 7, 8}

আবার কোন সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে, তার আহক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা = 2^n।

B সেটের উপাদান সংখ্যা = 5

সুতরাং, P(B)উপাদান সংখ্যা = 2^5

১১.

$U = A \cup B$ এবং $n(U) = 120$ হলে, উপরের ভেনচিত্র অনুসারে 2x এর মান কত?

(ক) 15 (খ) 17 (গ) 20 (ঘ) 30 উত্তর: ঘ

ব্যাখ্যা: ভেনচিত্র হতে, n(A)= 75 – x + x

n(B)= x+ 60 – x =60

n(A∪B)= 75 −x+x+60 −x

n (U) = 120

দেওয়া আছে, U = A ∪ B

বা, n (U) = n(A ∪ B)

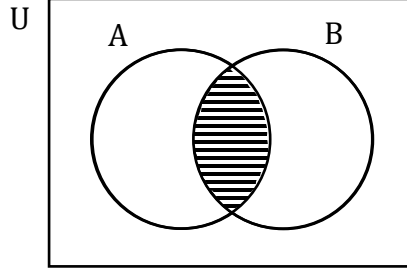
বা, 120 = 75 – x + x + 60 −x

বা, 120 = 135 – 120

বা, x = 15

∴2x=2×15

∴2x=30

১২.

ভেনচিত্রের গাঢ় অংশটি কী প্রকাশ করে?

(ক) $A \cup B$ (খ) $U - A$ (গ) $A - B$ (ঘ) $A \cap B$ উত্তর: ঘ

ব্যাখ্যা: বৃত্তদ্বয়ের common অংশ দ্বারা ছেদ সেট অর্থাৎ $A \cap B$ বুঝায়।

১৩. $U=\{X : X \epsilon N, x \leq 10\}; A = \{x : x \epsilon N, x \leq 8$ এবং x জোড় সংখ্যা$\}$,

$B = \{x : x \epsilon N, x, 3$ এর গুণিতক$\}$ হলে $A \cap B$ সমান?

(ক) ϕ (খ) $\{6\}$ (গ) $\{6,8\}$ (ঘ) $\{2, 3, 4, 6, 8\}$ উত্তর: খ

ব্যাখ্যা: দেওয়া আছে, $U=\{X : X \epsilon N, x \leq 10\}$

বা, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

আবার, $A=\{x : x \epsilon N, x \leq 8$ এবং x জোড় সংখ্যা$\}$

বা, $A = \{2, 4, 6, 8\}$

$B = \{x : x \epsilon N, x, 3$ এর গুণিতক$\}$

বা, $B = \{3, 6, 9\}$

$A \cap B = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{3, 6, 9\}$

$= \{6\}$

১৪. $A \cup B = B \cup A$ সম্পর্কিত সেটের কোন নিয়ম মেনে চলে?

(ক) বিনিময় (খ) সংযোজন (গ) বণ্টন (ঘ) দ্যা মরগ্যান উত্তর: ক

ব্যাখ্যা: বিনিময় বিধি

(১) $A \cup B = B \cup A$

(২) $A \cap B = B \cap A$

১৫. সেট প্রক্রিয়ায় সংযোজন বিধি কোনটি?

(ক) $A \cap B = B \cap A$ (খ) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(গ) $A \cup B = A \cup (B \cap B)$ (ঘ) $A \cap B \cap C = A \cap C$ উত্তর: খ

ব্যাখ্যা: সংযোজন বিধি(সেট):

সেট সংযোজন বিধি, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ অনুসারে

১৬. A, B ও C যে কোন সেট হলে নিচের কোনটি বণ্টন নিয়ম?

(ক) $A \cup B = B \cup A$ (খ) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(গ) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ঘ) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ উত্তর: ঘ

ব্যাখ্যা: বিনিময় বিধি:

(১) $A \cup B = B \cup A$

(২) $A \cap B = B \cap A$

সংযোগ বিধি:

(১)$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(২) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

বণ্টন বিধি:

(১) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(২)$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$

১৭. সার্বিক সেট U এর যে কোনো উপসেট A, B এবং C এর জন্য কোনটি মরগ্যানের সূত্র?

(ক) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (খ) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(গ) $A \cup B = B \cup A$ (ঘ) $A' / B' = B/A$ উত্তর: ক

ব্যাখ্যা: ডি মরগানের সুত্র:

সার্বিক সেট U এর যেকোনো উপসেট A,B এবং C হলে

1. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

১৮. U সার্বিক সেট হলে, $A \cup \emptyset$ = কত?

(ক) A (খ) U (গ) $\emptyset$ (ঘ) $\{A, \emptyset\}$ উত্তর: ক

ব্যাখ্যা: $\emptyset$ ফাঁকা সেট। ফাঁকা সেট $\emptyset$ যেকোনো সেট A এর উপসেট। অর্থাৎ, $\emptyset \subseteq A$। সুতরাং, সেটের প্রতিজ্ঞা অনুসারে, $A \cup \emptyset = A$.

১৯. $A \cap B = B$ এবং A, B সমান না হলে নিচের কোনটি সঠিক? [চ. বো. ২০১৫]

(ক) $A \subseteq B$ (খ) $B \subseteq A$ (গ) $A \cup B = B$ (ঘ) $B \notin A$ উত্তর: খ

ব্যাখ্যা: এখানে, $A \cap B = B$, অর্থাৎ A ও B এর সাধারণ সদস্যগুলো এবং B সেটের সদস্য একই। অতএব, B অবশ্যই A সেটের উপসেট।

অর্থাৎ, $B \subseteq A$

২০. A, B ও C যেকোনো সেট হলে, নিচের কোনটি বন্টন নিয়ম? [য. বো. ২০১৫]

(ক) $A \cup B = B \cup A$ (খ) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(গ) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ঘ) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ উত্তর: ঘ

ব্যাখ্যা: বণ্টন বিধি অনুসারে, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

বিনিময় বিধি অনুসারে, $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

সংযোগ বিধি অনুসারে, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

২১. যদি $A \subset B$ হয়, তবে নিচের কোনটি সঠিক? [চ বো ২০১৬, ২০১৭]

(ক) $A \cup B = A$ (খ) $A \cap B = A$ (গ) $A \cap B = A$ (ঘ) $A' \subset B'$ উত্তর: খ

ব্যাখ্যা: যেহেতু, $A \subset B$, সেটের প্রতিজ্ঞা অনুসারে, $A \cap B = A$

২২. $P = \{1,2,3\}, Q = \{1,2,3,4\}$ ও $R = \{1,2,3,4\}$ হলে-

(i) $P \subset R$

(ii) Q, R এর প্রকৃত উপসেট

(iii) P, R এর প্রকৃত উপসেট

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii উত্তর: খ